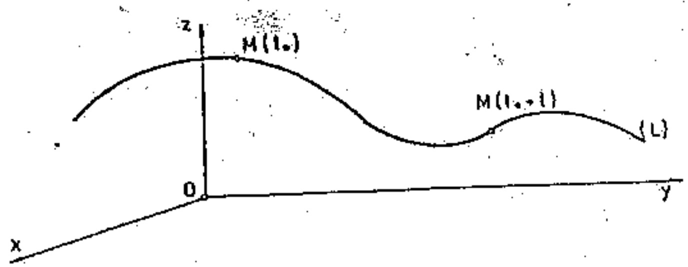
Na kraju možemo dati obrazac za izračunavanje dužine puta koji za neko vreme t predje tačka M.



Sl. 15

Sa slike 15. se vidi da je predjeni put za vreme t, geometrijski posmatrano, luk krive (L) izmedju tačaka $M(t_0)$ i $M(t_0 + t)$, pa možemo pisati da je put:

$$s_{M(t_0),\, M(t_0+t)} = \int_{M(t_0)}^{M(t_0+t)} ds$$

Diferencijal luka dat je sa:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 dt^2 + \dot{y}^2 dt^2 + \dot{z}^2 dt^2}$$

$$= dt\,\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$$

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt};\ \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt};\ \dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} \qquad (32)$$

pa je predjeni put:

$$s_{M(t_0),\, M(t_0+t)} = \int_{t_0}^{t_0+t} dt\,\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} = \int_{t_0}^{t_0+t} dt\,|\vec{v}(t)| \qquad (33)$$

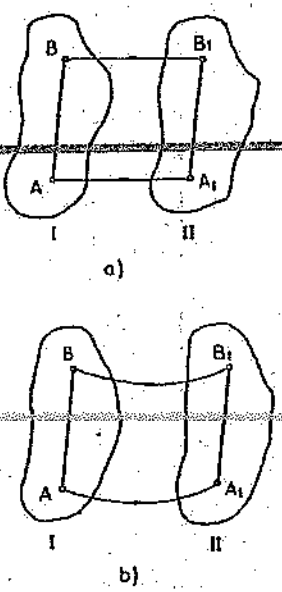
M E H A N I K A

U V O D

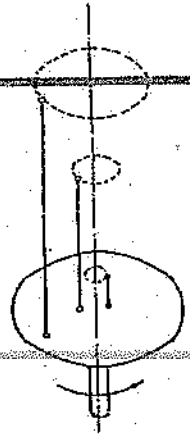
Mehanika izučava najjednostavnije oblike kretanja materije, koji se svode na pomeranja tela u prostoru i na njihova medjudejstva. Ova kretanja su najpristupačnija svakodnevnom iskustvu, te nam se zato zakoni mehanike čine jednostavnim i logičnim daleko više nego na primer zakoni kvantne mehanike, koji opisuju pojave koje ne možemo da doživimo svojim čulima. Da bismo izučavali kretanje tela treba da definišemo u odnosu na šta se tela kreću, odnosno da izaberemo referentni sistem. Izbor referentnog sistema nije jednostavan, jer ni jedno telo u svemiru ne miruje, te apsolutno nepokretan koordinatni sistem ne postoji. Zbog toga su sva kretanja relativna. Dugo vremena se smatralo da je vasiona ispunjena hipotetičnom supstancom nazvanom "etar", koja prenosi elektromagnetne talase i koja apsolutno miruje. Eksperimentalno otkriće, da se postojanje ovakve supstance ne može registrovati, dovelo je do preformulacije cele klasične mehanike. Za praktične račune uvek se može izabrati neki pogodan referentni sistem, koji u zavisnosti od vrste problema mogu činiti zidovi laboratorije, površina Zemlje ili pak odredjeni sistem zvezda.

U velikom broju mehaničkih problema se dimenzije tela mogu zanemariti u uslovima datog problema, čime se dobijaju znatno uprošćena matematička rešenja problema. U svim ovakvim slučajevima se govori o kretanju "materijalne tačke" (tela sa konačnom masom i zanemarljivom zapreminom), koja ima sledeća svojstva: može se kretati, odnosno menjati svoj položaj u prostoru i vremenu, sadrži neku količinu materije i podvrgnuta je uzajamnom dejstvu sa okolinom.

Svako kretanje čvrstog tela može se smatrati kao kombinacija dva osnovna vida kretanja, translacije i rotacije. Pod translatornim kretanjem podrazumevamo takvo kretanje kod kojeg svaka prava ili ravan tela ostaje sama sebi paralelna (sl. 1). Ako se na primer telo iz položaja I premesti u položaj II, onda je njegova proizvoljna prava AB prešla u položaj A_1B_1 tako da je ostala sama sebi paralelna. Ako su se tačke A i B kretale po pravim linijama translacija je pravolinijska (sl. 1.a), a ako po krivim linijama onda je krivolinijska (sl. 1.b).



Sl. 1.



Sl. 2.

Rotacija je takvo pomeranje pri kojem se sve tačke tela kreću po koncentričnim krugovima, čiji centri leže na jednoj istoj pravoj, koja se naziva osa rotacije (sl. 2). Izmedju translatornog i rotacionog kretanja postoji bitna razlika. Kod tran-slacije sve tačke tela imaju jednake brzine, dok kod rotacije tačke tela imaju različite brzine, srazmerne rastojanju od ose obrtanja.

Prema objektu istraživanja mehanika se deli na:

- mehaniku materijalne tačke
- mehaniku čvrstih tela
- mehaniku kontinuuma, koja obuhvata:

teoriju elastičnosti i mehaniku fluida.

S obzirom na vrstu analize sistema mehaniku još delimo na:

KINEMATIKU, koja proučava zakone kretanja bez obzira na sile koje su ta kretanja prouzrokovala;

DINAMIKU, koja proučava zavisnost izmedju sila i kretanja koje one prouzrokuju;

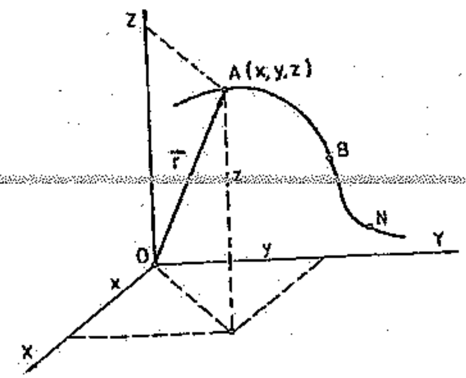
STATIKU, koja proučava uslove ravnoteže tela pod dejstvom više sila

I. KINEMATIKA

1. OSNOVNI POJMOVI KINEMATIKE

a. Putanja, put i brzina

Kada se neko telo kreće, ono menja svoj položaj, pa se može reći da je kretanje relativna promena položaja prema okolini, odnosno prema referentnom sistemu. Linija koja spaja sve tačke u prostoru kroz koje prolazi materijalna tačka N pri kretanju, naziva se putanja ili trajektorija (sl. 1.1). Putanja

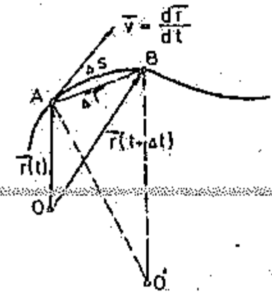


Sl. 1.1

može biti prava ili kriva linija, te kretanje prema obliku putanje može biti pravolinijsko i krivolinijsko. Deo putanje, na primer od tačke A do tačke B (sl. 1.1), koji materijalna tačka predje u odredjenom vremenskom intervalu, naziva se put. Ako se u svakom trenutku vremena može odrediti položaj materijalne

tačke moguće je postaviti zavisnost izmedju predjenog puta i proteklog vremena. Ta zavisnost predstavlja funkciju vremena $s = s(t)$ i zove se zakon puta. Znači, da bi se u svakom trenutku odredio položaj materijalne tačke na putanji potrebno je znati: putanju (trajektoriju) i zakon puta. Položaj tačke A u odnosu na koordinatni početak O može se odrediti pomoću koordinata x, y i z ili pomoću radijus-vektora (vektor položaja) $\vec{r}(\vec{OA} = \vec{r})$. Radijus-vektorom jedne tačke ($\vec{r}$) naziva se vektor povučen iz koordinatnog početka u datu tačku (sl. 1.1) i on jednoznačno odredjuje položaj te tačke u prostoru. Radijus-vektor $\vec{r}$ pri kretanju materijalne tačke, uopšteno govoreći, menja se i po intenzitetu i po pravcu.

Posmatrajmo kretanje materijalne tačke po proizvoljnoj putanji (sl. 1.2). Neka se materijalna tačka u trenutku t našla u položaju A, koji je odredjen vektorom položaja $\vec{r}$. Posle elementarnog vremenskog intervala Δt materijalna tačka prešla je elementarni put Δs (tačka B), a vektor položaja $\vec{r}$ dobio je elementarni priraštaj $\Delta\vec{r}$. Modul i pravac vektora $\Delta\vec{r}/\Delta t$, uopšte govoreći, zavisi od vremenskog intervala Δt. Smanjivanjem vremenskog intervala Δt smanjivaće se i Δs i $\Delta\vec{r}$. Kad Δt teži nuli, vektor $\Delta\vec{r}/\Delta t$ se praktično ne menja po veličini i po pravcu i teži nekoj graničnoj vrednosti, koja se obeležava sa $\vec{v}$ i naziva se brzinom pokretne materijalne tačke u trenutku t, tj.



Sl. 1.2

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Sa slike 1.2. sledi da je vektor priraštaja $\Delta\vec{r}$ jednak razlici radijus-vektora koji odredjuju položaj materijalne tačke u trenutku t i t+Δt.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Zamenom $\Delta\vec{r}$ u poslednji izraz za $\vec{v}$ dobijamo prema (29) da je

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.1)$$

tj. pri vektorskom opisivanju kretanja trenutna brzina je odredjena diferencijalnom količinom infinitezimalne promene vektora položaja i vremena, ili trenutna brzina je prvi izvod radijus-vektora po vremenu. Vektor $\vec{v}$ ima pravac tangente na putanju i usmeren je u pravcu kretanja materijalne tačke.

Sa slike 1.2. vidimo da vektor $\Delta\vec{r}$ za fiksirane tačke A i B ne zavisi od izbora centra O. Ako se centar premesti u tačku O′, $\Delta\vec{r}$ se ne menja; ne menja se ni granična vrednost (1.1). Zbog toga pri opisivanju kretanja centar O može biti izabran proizvoljno. Ako se vektor položaja izrazi preko jediničnog orta, kao prema relaciji (1), $\vec{r} = |\vec{r}|\vec{r}_0$, nakon diferenciranja* po vremenu dobija se izraz za brzinu u obliku

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(|\vec{r}|\vec{r}_0) = \frac{d|\vec{r}|}{dt}\vec{r}_0 + |\vec{r}|\frac{d\vec{r}_0}{dt} \qquad (1.2)$$

Elementarni put Δs (sl. 1.2) različit je, u opštem slučaju, od modula elementarnog priraštaja $|\Delta\vec{r}|$. Kad $\Delta t \to 0$, onda je Δs identičan sa modulom $|\Delta\vec{r}|$, te se može napisati

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{odnosno} \quad \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

Tada izraz za brzinu može da se predstavi u obliku

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \qquad (1.3)$$

tj. intenzitet** brzine je odredjen diferencijalnim količnikom puta i vremena, ili brzina je prvi izvod puta po vremenu. Ra-

---

*Na osnovu opšteg pravila diferenciranja proizvoda skalara $a(t)$ i vektora $\vec{b}(t)$

$$\frac{d}{dt}(a\vec{b}) = \frac{da}{dt}\vec{b} + a\frac{d\vec{b}}{dt}$$

** $v \equiv |\vec{v}|$

zumljivo je da će brojna vrednost (intenzitet) brzine, tj. odnos $\Delta s/\Delta t$ u svakoj tački putanje biti stalan (konstantan) ako se telo kreće jednoliko, tj. ako u jednakim intervalima vremena Δt prelazi jednake intervale puta Δs. Medjutim, taj količnik $\Delta s/\Delta t$ imaće različite vrednosti u raznim tačkama putanje ako se telo kreće promenljivo, tj. u jednakim intervalima vremena Δt prelazi nejednake intervale puta Δs. Tada odnos $\Delta s/\Delta t$ daje srednju brzinu v_{sr} u datom intervalu vremena, tj.

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (1.4)$$

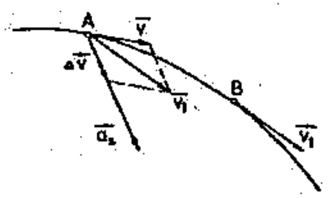
Srednja brzina je stalna brzina kojom bi telo pri jednolikom kretanju prešlo isti put Δs za isto vreme Δt kao kod promenljivog kretanja. Odstupanje srednje brzine od trenutne brzine je pri malim intervalima vremena obično zanemarljivo malo, te se može praktično zanemariti. Jedinica za brzinu je $[m/s]$.

b. Ubrzanje

Jedna od veličina koja doprinosi odredjivanju karaktera kretanja je ubrzanje ili akceleracija. Ako je brzina materijalne tačke u trenutku t_1 bila $\vec{v}_1$, a u trenutku t_2 bila $\vec{v}_2$, onda se promena brzine $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ u vremenskom intervalu $t_2 - t_1$ zove srednje ubrzanje pokretne materijalne tačke, tj.

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (1.5)$$

Kao što se iz (1.5) vidi srednje ubrzanje je vektorska veličina i odredjuje promenu stanja kretanja samo u odredjenom vremenskom intervalu. Medjutim, ako je potrebno odrediti trenutno ubrzanje, tj. ubrzanje u jednoj odredjenoj tački putanje, postupa se na sličan način kao i pri definisanju trenutne brzine. Neka je na proizvoljnoj krivolinijskoj putanji (sl. 1.3) u trenutku t materijalna tačka bila u položaju A sa brzinom $\vec{v}$, a nakon vremena Δt u položaju B sa brzinom $\vec{v}_1$. Brzine $\vec{v}$ i $\vec{v}_1$ se u opštem slučaju razlikuju po intenzitetu i pravcu. Ako se vektor brzine $\vec{v}_1$ translatorno pomeri na zajednički početak sa vektorom brzine



Sl. 1.3

$\vec{v}$ dobiće se vektor priraštaja $\Delta\vec{v}$. Vektor $\Delta\vec{v}$ ima drugi pravac i smer u odnosu na brzinu $\vec{v}$ i usmeren je ka konkavnoj strani krivine. Prema izrazu (1.5) srednje ubrzanje je

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

a pravac $\vec{a}_{sr}$ se poklapa sa pravcem vektora $\Delta\vec{v}$. Srednje ubrzanje $\vec{a}_{sr}$ se u opštem slučaju razlikuje od trenutnog ubrzanja $\vec{a}$ u tački A i po pravcu i intenzitetu. Razlika će biti manja ukoliko je vremenski interval Δt manji. Može se zaključiti da će srednje ubrzanje $\vec{a}_{sr}$ dostići vrednost trenutnog ubrzanja $\vec{a}$ u graničnom slučaju kada rastojanje $AB \to 0$, odnosno vremenski interval $\Delta t \to 0$. Vektor $\vec{a}$ je u tom slučaju granična vrednost vektora $\vec{a}_{sr}$,

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.6}$$

tj. ubrzanje je diferencijalni količnik brzine i vremena. Vektor $\vec{a}$ je usmeren ka centru krivine trajektorije. Kako su u slučaju pravolinijskog kretanja $\vec{a}$ i $\vec{v}$ uvek istog pravca, to se izraz (1.6) može napisati u skalarnom obliku,

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{1.7}$$

tj. ubrzanje je prvi izvod brzine po vremenu, ili drugi izvod puta po vremenu. Jedinica za ubrzanje je $[m/s^2]$. U praksi se retko koristi pojam srednjeg ubrzanja. Zato ubuduće pod pojmom ubrzanja treba uvek podrazumevati trenutno ubrzanje.

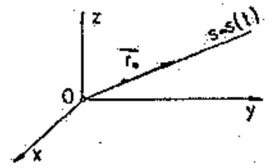
Ako se vektor $\vec{v}$ prema (1) napiše kao $\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{v}_0$ tada se prema (1.6) ubrzanje $\vec{a}$ može predstaviti kao

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(|\vec{v}|\,\vec{v}_0\right) = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\,\vec{v}_0 + \frac{d\vec{v}_0}{dt}\,|\vec{v}| \tag{1.8}$$

Ubrzanje može biti pozitivno i negativno. Negativno ubrzanje naziva se usporenje.

2. PRAVOLINIJSKO KRETANJE

Kretanje kod kojeg je putanja prava linija naziva se pravolinijsko. Ako se koordinatni početak O nalazi na putanji (sl. 2.1) onda ort $\vec{r}_0$ bilo koje tačke na putanji ne menja pravac.



Sl. 2.1

Tada se ovo kretanje može matematički definisati uslovom

$$\vec{r}_0 = const. \tag{2.1}$$

Zamenom uslova $\vec{r}_0 = const.$ u jednačinu (1.2) dobija se

$$\vec{v} = \frac{|d\vec{r}|}{dt}\,\vec{r}_0 \tag{2.2}$$

Kako je $|d\vec{r}| = ds$, to je intenzitet brzine kod pravolinijskog kretanja dat kao

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{2.3}$$

Kod pravolinijskog kretanja vektor brzine ima pravac duž putanje.

Istim postupkom prema (1.6) i (2.2) dobija se izraz za ubrzanje kod pravolinijskog kretanja

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{|d\vec{r}|}{dt}\,\vec{r}_0\right] = \frac{|d^2\vec{r}|}{dt^2}\,\vec{r}_0 = \frac{d^2s}{dt^2}\,\vec{r}_0 \tag{2.4}$$

odnosno, za intenzitet

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{2.5}$$

3. UNIFORMNO (RAVNOMERNO) KRETANJE

Ako se materijalna tačka kreće po pravoj putanji, tako da u jednakim vremenskim intervalima prelazi jednake puteve, kretanje se zove "uniformno". Kod uniformnog kretanja brzina je konstantna, tj. nema priraštaja brzine u jedinici vremena, pa je ubrzanje prema (1.7) jednako nuli. Ovaj uslov može se napisati

$$\vec{v} = const., \; \vec{a} = 0 \qquad (3.1)$$

Kod ovog kretanja se, očigledno, pojam srednje brzine izjednačuje sa pojmom trenutne brzine. Prema obrascu (2.2) je $ds = v \cdot dt$. Uzimajući da se kretanje vrši u vremenskom intervalu od $t_0 = 0$ do t sa $v = const.$ i da je predjeni put u početnom trenutku vremena $s_0 = 0$, dobija se

$$\int_{t_0=0}^{t} v dt = \int_{s_0=0}^{s} ds \qquad (3.2)$$

a nakon integraljenja

$$s = v \cdot t \qquad (3.3)$$

tj. predjeni put jednak je proizvodu brzine i vremena. Jednačina (3.3) odredjuje zakon puta uniformnog pravolinijskog kretanja.

Jednačine (3.1) i (3.3) kojima se opisuje uniformno (ravnomerno) kretanje predstavljene su na slici 3.1. Sa grafika

Sl. 3.1

v,t sledi da se put kod uniformnog kretanja može predstaviti i površinom (šrafirana površina).

4. JEDNAKO UBRZANO KRETANJE

Ako se materijalna tačka kreće po putanji tako da u jednakim vremenskim razmacima prelazi različite puteve, kretanje se zove promenljivo. Promenljivo kretanje može biti ubrzano ili usporeno, već prema tome da li intenzitet brzine pokretne materijalne tačke raste ili opada. Promenljivo kretanje kod kojeg materijalna tačka u jednakim vremenskim razmacima dobija jednake priraštaje brzine (stalni iznos - ubrzanje a) naziva se jednako ubrzano kretanje. Kod ovog kretanja ubrzanje je konstantno, $\vec{a} = const.$, pa je prema (1.6)

$$d\vec{v} = \vec{a}\, dt \qquad (4.1)$$

Uzimajući da je u početnom trenutku kretanja ($t_0 = 0$) pokretna materijalna tačka imala početnu brzinu $\vec{v}_0$, a na kraju vremenskog intervala t brzinu $\vec{v}$, sledi prema (4.1)

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \int_{t_0=0}^{t} \vec{a}\, dt$$

odnosno, nakon integraljenja dobija se

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \qquad (4.2)$$

Kod pravolinijskog kretanja $\vec{v}$, $\vec{v}_0$ i $\vec{a}$ su istog pravca i kolinearni su sa putem. Kada su vektor ubrzanja $\vec{a}$ i vektor brzine $\vec{v}_0$ istog pravca i smera kretanje je jednako ubrzano, a ako su istog pravca, a suprotnog smera kretanje je jednako usporeno.

Na osnovu kolinearnosti vektora $\vec{v}$, $\vec{v}_0$ i $\vec{a}$ sa putem izraz (4.2) se može napisati u skalarnom obliku

$$v = v_0 \pm a \cdot t \qquad (4.3)$$

gde se znak "+" odnosi na jednako ubrzano, a znak "-" na jednako usporeno kretanje.

Srednja brzina jednako ubrzanog kretanja u nekom intervalu vremena data je aritmetičkom sredinom početne (v_0) i krajnje brzine (v)

$$v_{sr} = \frac{v_0 + v}{2} \qquad (4.4)$$

Srednja brzina odgovara stalnoj brzini kojom telo predje isti put za isto vreme, ako se pri tome kreće uniformno.

Iz izraza (2.3) i (4.3) sledi da je

$$ds = v_0 dt + a \cdot t dt$$

odnosno,

$$\int_{s_0}^{s} ds = v_0 \int_{t_0=0}^{t} dt + a \int_{t_0=0}^{t} t dt$$

pošto su $\underline{a}$ i v_0 konstante. Nakon integraljenja dobija se obrazac za put kod jednako ubrzanog kretanja,

$$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2} \qquad (4.5)$$

gde je s_0 put u početnom trenutku vremena $t_0 = 0$. Ako je $s_0 = 0$ tada je

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} \qquad (4.6)$$

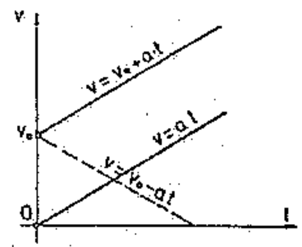
Rešavanjem jednačine (4.3) po t i zamenom u jednačinu (4.6) dobija se

$$v^2 = v_0^2 \pm 2as \qquad (4.7)$$

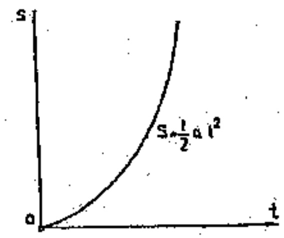
U praksi je čest slučaj da materijalna tačka krene iz stanja mirovanja ($v_0 = 0$), tada jednačine (4.3), (4.6) i (4.7) imaju oblik

$$v = at; \quad s = \frac{at^2}{2}; \quad v^2 = 2as \qquad (4.8)$$

Na slici 4.1. i 4.2. grafički su prikazane zakonitosti date jednačinama (4.3) i (4.8).



Sl. 4.1



Sl. 4.2

5. PRIMERI UBRZANOG KRETANJA

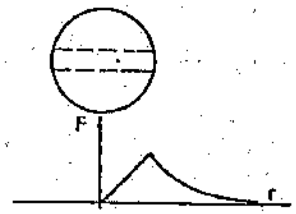
5.1. Slobodno padanje

Najpoznatiji i najčešće sretani primer kretanja sa konstantnim ubrzanjem je slobodno padanje. Pod slobodnim padanjem podrazumeva se padanje tela bez početne brzine u polju sile Zemljine teže sa izvesne visine H. Kako je ubrzanje Zemljine teže g konstantno (na malim visinama iznad Zemlje), a putanja prava linija, sledi da je slobodno padanje pravolinijsko jednako ubrzano kretanje.

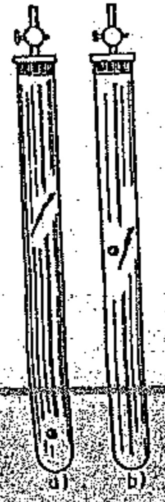
Na sva tela koja slobodno padaju deluje konstantna sila - sila gravitacije*. Kako je gravitaciona sila proporcio-

---

* *Strogo uzevši ta sila nije konstantna. Ako bi Zemlja bila homogena i ako bi se kroz njen centar mogao probušiti tunel onda bi gravitaciona sila, koja bi dejstvovala na jednu česticu (tj. njena težina), menjala kao što pokazuje slika. Maksimum bi se nalazio na Zemljinoj površini i sila bi linearno opadala ka nuli ako bismo se približavali centru i opadala kao $1/r^2$ prema nuli ako bismo se udaljavali od Zemlje ka beskonačnosti.*



onalna masi tela, to će i ubrzanje biti konstantno i jednako za sva tela.* Ovu naoko očiglednu činjenicu nije bilo lako uočiti, jer zbog delovanja otpora vazduha različita tela padaju različitim brzinama (sl.5.1.a). Ako perce i metalnu kuglicu stavimo u staklenu cev (sl. 5.1.b) (Njutnov ogled) iz koje je izvučen vazduh, zapažamo da u njoj tada sva tela padaju jednakom brzinom. Iz toga zaključujemo da u bezvazdušnom prostoru sva tela padaju istom brzinom i da sva tela imaju isto ubrzanje $g = 9{,}81\ m/s^2$ **.



Sl. 5.1

Kako je, po pretpostavci, $v_0 = 0$, $z_0 = 0$, $z = s = H$, to iz (4.3) i (4.5) se dobija

$$v = gt, \quad H = \frac{1}{2}gt^2 \tag{5.1}$$

Eliminacijom vremena t iz jednačina (5.1) dobija se brzina tela u trenutku udara o Zemlju

$$v = \sqrt{2gH} \tag{5.2}$$

tj. brzina pri slobodnom padanju srazmerna je kvadratnom korenu iz visine padanja.

5.2. Hitac

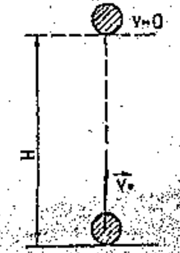
Kretanje tela, koje je izbačeno početnom brzinom $\vec{v}_0$ u polju sile Zemljine teže, naziva se hitac. Predpostavlja se da u toku kretanja tela ne postoji sila trenja i da se kretanje odvija na malim visinama iznad Zemlje. U zavisnosti od toga pod kojim je uglom u odnosu na površinu Zemlje telo izbačeno, razlikujemo: vertikalni, horizontalni i kos hitac.

---

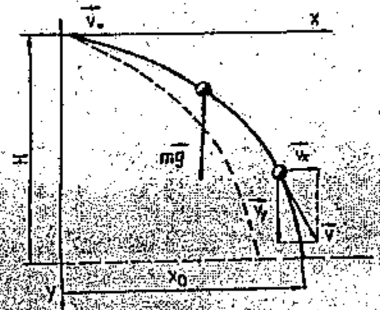
* *Zbog jednakosti gravitacione i inercione mase (vidi 22.4).*

** *Gravitaciono ubrzanje g zavisi od geografske širine i nadmorske visine.*

a. Vertikalni hitac. Kod vertikalnog hica telo se izbacuje u vis početnom brzinom v_0 (sl.5.2).



Sl. 5.2



Sl. 5.3

Kako se ovde radi o jednako usporenom kretanju, predjeni put i brzina posle vremena t nakon izbacivanja tela su

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5.3}$$

$$v = v_0 - gt \tag{5.4}$$

Visina penjanja H i vreme penjanja t izračunava se iz uslova da je u najvišoj tački putanje brzina tela $v = 0$. Tada iz jednačine (5.4) sledi

$$t = \frac{v_0}{g} \tag{5.5}$$

Zamenom izraza (5.5) u izraz (5.3) dobija se visina penjanja

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \tag{5.6}$$

b. Horizontalni hitac. Kretanje tela, koje je izbačeno u horizontalnom pravcu, brzinom v_0, naziva se horizontalni hitac (sl. 5.3). Horizontalni hitac zapravo je složeno kretanje, koje se sastoji od dve komponente:

- uniformnog kretanja duž x-ose (horizontalna komponenta),
- jednako ubrzanog kretanja (slobodnog padanja) duž y-ose (vertikalna komponenta).

Odgovarajuće jednačine za predjeni put su

$$x = v_0 t; \; y = \frac{1}{2} g t^2 \qquad (5.7)$$

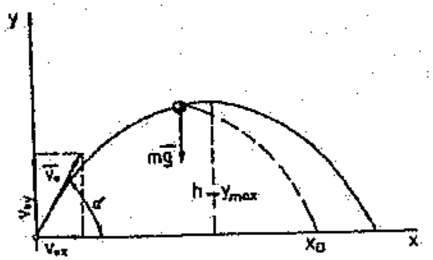
Ako se iz jednačina (5.7) eliminiše vreme t dobija se jednačina putanje

$$y = \frac{g}{2 v_0^2} x^2 \qquad (5.8)$$

Ako je telo izbačeno u pravcu horizonta sa visine H (sl. 5.3), može se izračunati njegov domet x_D uvrštavanjem u jednačinu (5.8) $y = H$ i $x = x_D$, pa se dobija

$$x_D = \sqrt{2 v_0^2 H / g} \qquad (5.9)$$

c. Kos hitac. Kosim hicem naziva se kretanje tela koje je izbačeno početnom brzinom $\vec{v}_0$ pod oštrim uglom α u odnosu na horizont u polju Zemljine teže. Ovo složeno kretanje, čija putanja leži u jednoj ravni, može se rastaviti na uniformno pravolinijsko kretanje duž x-ose i na jednako usporeno kretanje duž y-ose (sl. 5.4).



Sl. 5.4

Komponente početne brzine su

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \;\; i \;\; v_{0y} = v_0 \sin\alpha \qquad (5.10)$$

a komponente brzine u trenutku t

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \; v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt \qquad (5.11)$$

Za vreme t telo duž x i y-ose prelazi put

$$x = v_0 t \cos\alpha; \; y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (5.12)$$

Ako se iz jednačina (5.12) eliminiše vreme t dobija se jednačina putanje kod kosog hica

$$y = x \, tg\,\alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \qquad (5.13)$$

Domet tela x_D dobija se uvrštavanjem $y = 0$ u jednačinu (5.13). Rešenje dobijene kvadratne jednačine, koje je različito od nule, daje traženu vrednost dometa

$$x_D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \qquad (5.14)$$

Maksimalna visina koju telo dostigne (teme parabole) nalazi se iz uslova $dy/dx = 0$

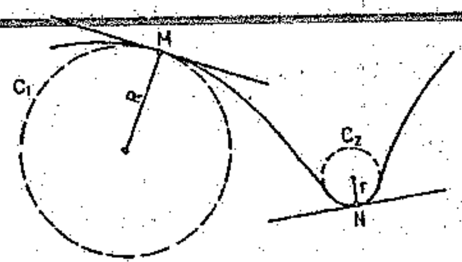
$$h = y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha \qquad (5.15)$$

Realno, u slučajevima hica, sila trenja vazduha postoji. Posledica dejstva ove sile na telo u kretanju je deformacija putanje kosog i horizontalnog hica, tako da putanje više nisu parabole već tzv. balističke krive, koje su na slici 5.3. i slici 5.4. prikazane isprekidanim linijama.

6. KRIVOLINIJSKO KRETANJE

Kod pravolinijskog kretanja brzina i ubrzanje se menjaju po intenzitetu i po pravcu. Svako krivolinijsko kretanje je ubrzano kretanje, jer promena brzine po pravcu izaziva ubrzanje i onda kada se ne menja intenzitet brzine*.

Svako krivolinijsko kretanje može da se svede na kružno kretanje po fragmentima različitih poluprečnika. Kružnicom krivine kod putanje materijalne tačke (za posmatrane tačke M i N) (sl. 6.1), naziva se kružnica koja prolazi kroz tu tačku i poklapa se sa diferencijalno malim delom krivine ds u okolini te tačke. Sa slike se vidi da je poluprečnik krivine veći u tački M gde je krivina manja, a manji u tački N gde je krivina veća. Može se zaključiti da su krivine K_1 i K_2 kružnica C_1 i C_2 obrnuto srazmerne njihovim poluprečnicima u posmatranim tačkama, tj.



Sl. 6.1

$$K_1 = \frac{1}{R} \text{ i } K_2 = \frac{1}{r}$$

Očigledno je, da su poluprečnici krivina R i r uvek normalni na tangentu, odnosno na vektore brzina u toj tački.

Kod svake vektorske veličine promena pravca znači promenu same veličine.

7. KRUŽNO KRETANJE

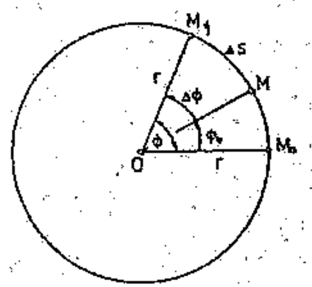
Najjednostavnije krivolinijsko kretanje je kružno kretanje. Kod ovog kretanja putanja je kružna linija. Ako je brzina ovog kretanja konstantnog intenziteta, kretanje se zove uniformno (ravnomerno) kružno kretanje, a ako se intenzitet brzine menja, kretanje se zove neravnomerno i to ubrzano ili usporeno. Ako je ubrzanje konstantno kretanje je jednako ubrzano, odnosno jednako usporeno.

Položaj materijalne tačke kod kružnog kretanja može se dati pomoću radijus-vektora, tj. vektora koji spaja centar sa položajem materijalne tačke na kružnoj putanji, a usmeren je od centra ka putanji. Kretanje po kružnoj putanji matematički se definiše relacijom

$$|\vec{r}| = const. \tag{7.1}$$

Radi jednostavnijeg opisivanja kružnog kretanja uvodi se pojam ugaone brzine i ugaonog ubrzanja.

a. Ugaona brzina. Ako se materijalna tačka (sl. 7.1) kreće po kružnoj putanji, onda je u svakom trenutku vremena njen položaj odredjen lukom M_1M_0, odnosno uglom ϕ. Ukoliko je u trenutku t_0 položaj definisan uglom ϕ_0, a u trenutku t uglom ϕ, onda je odgovarajuća ugaona promena $\Delta\phi = \phi - \phi_0$, a vremenska promena $\Delta t = t - t_0$. Prema analogiji sa definisanjem srednje brzine kod translatornog kretanja (1.4) definiše se srednja ugaona brzina, kao ugaona promena za proteklo vreme



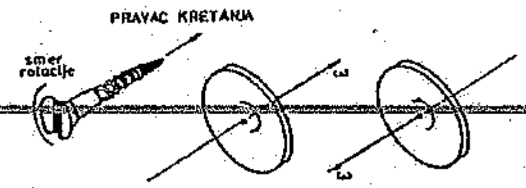
$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \tag{7.2}$$

Sl. 7.1

Kada se tačka M približava tački M_1, tj. kada $\Delta t \to 0$, srednja ugaona brzina teži trenutnoj ugaonoj brzini tela u tački M:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} \qquad (7.3)$$

Ugaona brzina $\vec{\omega}$ je vektorska veličina, čiji je intenzitet brojno jednak uglu za koji se telo obrne u jedinici vremena, čiji se pravac poklapa sa pravcem ose rotacije i normalan je na ravan obrtanja, a smer se odredjuje smerom desnog zavrtnja (sl. 7.2). Pri rotaciji brzina pojedinih tačaka je zavisna od rastojanja od ose rotacije, dok je ugaona brzina ista za sve tačke. Jedinica za ugaonu brzinu je rad/s.



Sl. 7.2

Ako je materijalnoj tački potrebno vreme T (jedan period) da opiše ceo krug $\Delta\phi = 2\pi$, onda je prema (7.3) njena ugaona brzina $\omega = 2\pi/T$. Ako materijalna tačka izvrši ν* obrta u jedinici vremena (1s), onda je vreme potrebno da ona izvrši jedan obrt $T = 1/\nu$, pa je

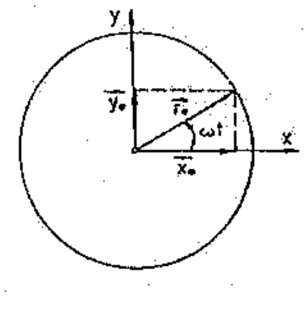
$$\omega = 2\pi\nu \qquad (7.4)$$

Kod kružnog kretanja koristi se kako pojam brzine v, tako i pojam ugaone brzine ω, te se radi boljeg definisanja brzina v zove

---

Broj obrtaja tela po krugu u jedinici vremena, odnosno frekvencija obrtanja $\nu = 1/T$ izražava se u jedinicama Hz (herc).

periferna ili obimna brzina. Veza izmedju ugaone brzine (7.3) i ranije definisane periferne brzine (1.1) može se izvesti na sledeći način: kao što se vidi na slici 7.3. ort-vektor položaja, se može razložiti na komponente



Sl. 7.3

$$\vec{r}_0 = (\cos\omega t)\vec{x}_0 + (\sin\omega t)\vec{y}_0 \qquad (7.5)$$

Prema (1.2), (7.1) i (7.5) dobija se

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt}|\vec{r}| = \qquad (7.6)$$
$$= |\vec{r}|\omega(-\vec{x}_0 \sin\omega t + \vec{y}_0 \cos\omega t) =$$
$$= |\vec{r}|\omega\vec{v}_0$$

te se korišćenjem osobina skalarnog proizvoda dobija izraz za vezu izmedju v i ω.

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \omega^2 r^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)$$

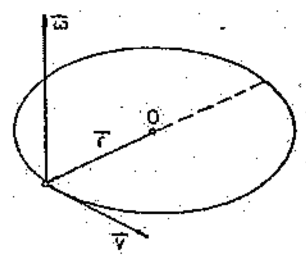
odnosno,

$$v = r\omega \qquad (7.7)$$

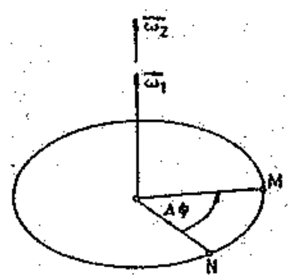
jer je $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$.

Prema jednačini (7.7), a na bazi definicije ugaone brzine može se videti (sl. 7.4) da je brzina $\vec{v}$ vektorski proizvod ugaone brzine $\vec{\omega}$ i radijus-vektora $\vec{r}$, tj.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (7.8)$$



Sl. 7.4



Sl. 7.5

Jednačina (7.7) daje vezu između intenziteta periferne brzine v i ugaone brzine ω. Na osnovu relacije (7.7) i (7.4) dobija se izraz

$$v = 2\pi\nu r \qquad (7.9)$$

b. Ugaono ubrzanje. Neka telo pri rotaciji u tački M ima ugaonu brzinu ω_1, a u tački N ugaonu brzinu ω_2 (sl. 7.5). Srednje ugaono ubrzanje za vreme Δt, za koje telo opiše ugao $\Delta\phi$, definiše se kao promena ugaone brzine $\Delta\omega$ po proteklom vremenu Δt, tj.

$$\alpha_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (7.10)$$

U graničnom slučaju kad $\Delta t \to 0$ srednje ugaono ubrzanje prelazi u trenutno ugaono ubrzanje u tački M

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (7.11)$$

odnosno,

$$\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = \frac{d^2\phi}{dt^2} \qquad (7.12)$$

8. RAVNOMERNO (UNIFORMNO) KRUŽNO KRETANJE

Pod ravnomernim kružnim kretanjem podrazumeva se kretanje tela po krugu poluprečnika r sa konstantnim intenzitetom brzine,

$$v = |\vec{v}| = const. \qquad (8.1)$$

a promenljivog pravca. Kod ovog kretanja je i ugaona brzina konstantna ($\omega = const.$), što znači da se materijalna tačka kreće po kružnoj putanji sa konstantnim brojem obrta ($\nu = const.$). Prema izrazu (7.3) je $d\phi = \omega dt$. Uzimajući da se kretanje vrši u vremenskom intervalu od $t_0 = 0$ do t sa $\omega = const.$ i da je ugao u početnom trenutku vremena $\phi_0 = 0$, dobija se

$$\int_{\phi_0=0}^{\phi} d\phi = \omega \int_{t_0=0}^{t} dt$$

a nakon integraljenja

$$\phi = \omega t \qquad (8.2)$$

što po analogiji odgovara zakonu ravnomernog pravolinijskog kretanja $s = v \cdot t$.

Ubrzanje kod ravnomernog kružnog kretanja dobija se preko izraza (1.8), (8.1), (7.5) i (7.6)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_0}{dt}|\vec{v}| = -|\vec{r}|\omega^2(\vec{x}_0 \cos \omega t + \vec{y}_0 \sin \omega t) = = -\omega^2\vec{r} \qquad (8.3)$$

Iz jednačine (8.3) vidimo da je kod ravnomernog kružnog kretanja ubrzanje različito od nule i da je usmereno ka centru rotacije. Ubrzanje kod ovog kretanja se zove centripetalno ili normalno ubrzanje (a_n). Kombinacijom izraza (7.7) i (8.3) dobija se veza između centripetalnog ubrzanja i periferne brzine

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad \text{ili} \quad \vec{a}_n = -\frac{v^2}{r}\vec{r}_0 \qquad (8.4)$$

9. UBRZANO KRUŽNO KRETANJE

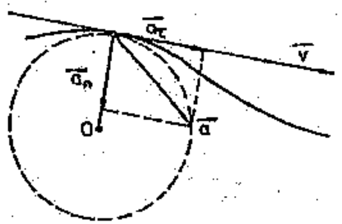
Kod neravnomernog (ubrzanog) kružnog kretanja brzina $v \neq const.$ pa prema tome i $\omega \neq const.$. Ako intenzitet periferne brzine nije konstantan, tada je

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{v}_0 \neq 0$$

tj.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_0}{dt}|\vec{v}| + \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{v}_0 \qquad (9.1)$$

što ukazuje da pored normalnog (centripetalnog) ubrzanja a_n postoji i tangencijalno ubrzanje a_τ. Ovo se može bolje razumeti ako se uoči da vektor ubrzanja $\vec{a}$ kod krivolinijskog kretanja u opštem slučaju zaklapa neki ugao sa tangentom, odnosno vektorom brzine u nekoj tački na putanji (sl. 9.1). Ubrzanje $\vec{a}$ povezano je sa svojim komponentama $\vec{a}_\tau$ i $\vec{a}_n$ sledećim relacijama



Sl. 9.1

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \text{ i } a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$$

pri čemu je prema (8.4) i (9.1)

$$\vec{a}_n = -\omega^2\vec{r} = -\frac{v^2}{r^2}\cdot\vec{r} \quad (9.2)$$

i

$$\vec{a}_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{v}_0 \quad (9.3)$$

Korišćenjem izraza (7.7) tangencijalno ubrzanje može se napisati i u obliku

$$a_\tau = r\frac{d\omega}{dt} \quad (9.4)$$

Kako je prema (7.11)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

to je

$$a_\tau = r\alpha \quad (9.5)$$

Ubrzanje a_τ postoji uvek pri neravnomernom kružnom kretanju, odnosno pri bilo kojem neravnomernom kretanju po krivoj liniji.

a. Jednako ubrzano kružno kretanje

Najjednostavnije ubrzano kružno kretanje je ono za koje je ugaono ubrzanje $\alpha = const.$. Po analogiji sa zakonima za jednako ubrzano pravolinijsko kretanje, obrasci (4.3), (4.5) i (4.7), dobijaju se sledeće jednačine

$$\alpha = const. \quad \omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (9.6)$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\phi$$

b. Jednako usporeno kružno kretanje

Ovo kretanje ima početnu ugaonu brzinu ω_0 i negativno ubrzanje, tj. ugaono usporenje, pa su osnovne kinematičke jednačine

$$-\alpha = const. \quad \omega = \omega_0 - \alpha t$$
$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t - \frac{\alpha t^2}{2}$$
$$\omega_0^2 - \omega^2 = 2\alpha\phi \quad (9.7)$$

10. ANALOGIJA IZMEDJU PRAVOLINIJSKOG I KRUŽNOG KRETANJA

Izrazi koji su izvedeni u prethodnom tekstu ukazuju na formalnu analogiju izmedju pravolinijskog i kružnog kretanja. Preko relacija

s	ϕ
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\phi}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

može se niz izraza za pravolinijsko kretanje transformisati u izraze za kružno kretanje. Sledeća tabela daje korespodenciju

PRAVOLINIJSKO KRETANJE	KRUŽNO KRETANJE
$s = v\cdot t$	$\phi = \omega t$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$
$v^2 = v_0^2 + 2as$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\phi$

II DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE

11. SILA I MASA. KOLIČINA KRETANJA

U delu kinematike posmatrana su kretanja tela kao prostorno vremenska pojava bez objašnjenja uzroka, koji takva kretanja izazivaju. Deo mehanike, koji proučava i kretanja i njihove uzroke zove se dinamika. Pitanje odnosa sile i kretanja zapravo je centralno pitanje dinamike. Iskustvo pokazuje da je svaka promena stanja kretanja nekog tela uzrokovana izvesnim tipom interakcije ovog tela sa drugim telima. Fizička veličina, koja služi kao mera uzajamnog dejstva tela (interakcija) naziva se sila. Egzaktno, prema Njutnu*, sila je uzrok promene kretanja tela bilo po veličini ili po smeru. Sila je odredjena intenzitetom, pravcem i smerom. Sila je dakle vektor. Treba naglasiti da sile možemo prepoznati samo po njihovom delovanju.

Do pojma mase može se doći ako posmatramo delovanje sila na različita tela. Kad, na primer, istom silom gurnemo drvenu i gvozdenu kuglu (istog oblika i zapremine) po glatkoj podlozi konstatovaćemo da će brzina gvozdene kugle biti manja od drvene, što znači da se ona više opire promeni kretanja od drvene. Ako želimo da promena njene brzine bude ista kao kod drvene mora se upotrebiti veća sila. Znači, različita tela pružaju različit otpor promeni stanja svog kretanja. Ova osobina zapaža se kod svih tela i naziva se <u>inertnost</u>. Veličina koja predstavlja kvantitativnu meru za inertnost tela naziva se <u>masa</u>. Treba razlikovati inerciju od inertnosti tela. Često se ova dva pojma zbog sličnih naziva uzajamno zamenjuju, pa i poistovećuju. Inercija se odnosi na mirovanje ili kretanje tela bez obzira na vrednost njihove mase, a inertnost je opiranje promeni stanja kretanja. Masa je skalarna veličina, a osnovna jedinica za masu je kilogram (kg).

Proizvod iz mase i brzine tela naziva se količina kretanja i označava se sa $\vec{k}$ ($\vec{k} = m\cdot\vec{v}$).

---

* *Isaac Newton (1643–1727), najveći fizičar, matematičar i astronom, a verovatno i jedan od najvećih umova u istoriji čovečanstva. Svojim aksiomima postavio je osnova moderne mehanike. Otkrio je zakon opšte gravitacije. Istovremeno sa Leibnizom otkrio je infinitezimalni račun.*

12. NJUTNOVI ZAKONI

Njutnovi zakoni objašnjavaju zašto se tela kreću i kako se tela kreću pod odredjenim uslovima. Ovi zakoni predstavljaju temelje tzv. klasične ili Njutnovske mehanike. Njutnovi zakoni potpuno definišu silu i to: postojanje sile, osobine sile (intenzitet, pravac i smer). Medjutim, pokazalo se da je Njutnova mehanika samo granični slučaj opšte relativističke i kvantne mehanike i da važi samo u slučaju kretanja tela sa velikom masom (u odnosu na masu atoma) i malom brzinom (u odnosu na brzinu svetlosti).

12.1. Prvi Njutnov zakon. Inercijalni sistemi.

Prvi Njutnov zakon glasi: *"Svako telo zadržava stanje mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja dok druga tela svojim dejstvom to stanje ne promene"*. Znači, bez interakcije se telo kreće konstantnom brzinom. Često se kaže da je ovakvo kretanje tela kretanje po inerciji. Matematički izraz ovog zakona je

$$m\cdot\vec{v} = const. \tag{12.1}$$

$$\vec{v} = const. \quad \text{ili} \quad \vec{a} = 0 \tag{12.2}$$

Uslovi (12.1) i (12.2) mogući su samo kad na tela ne deluju nikakve spoljne sile, tj.

$$\vec{F} = 0 \tag{12.3}$$

Iz iskustva poznata ravnomerna pravolinijska kretanja nisu kretanja po inerciji, već kretanja u uslovima u kojima se više dejstava na telo medjusobno poništavaju. U stvari, u realnim eksperimentima se ovaj zakon ne može ni proveriti, jer su u svemiru sva tela u medjusobnoj interakciji. Ovaj zakon treba shvatiti kao osnovni princip, koji je tesno povezan sa definicijom tzv. inercijalnih sistema. Naime, ovaj zakon ne važi u svakom referentnom sistemu. Na primer, ako se kretanje tela opisuje u referentnom sistemu koji se ubrzava (npr. koordinatni sistem vezan za automobil koji se kreće u krivini), tada ni u odsustvu interakcije ne važi zakonitost da je brzina tela konstantna. Referentni sistemi u kojima važi prvi Njutnov zakon zovu se "inercijalnim referentnim sistemima". Ako je ubrzanje nekog referentnog sistema daleko manje od ubrzanja tela koje ispitujemo, tada se taj referentni sistem može smatrati približno inercijalnim. Jedan od često korišćenih inercijalnih sistema jeste heliocentrični referentni sistem čiji se početak vezuje za naše Sunce. Na osnovu prvog Njutnovog zakona se definiše i tzv. klasičan princip relativnosti. Svi su referentni sistemi, koji se u odnosu na jedan inercijalni sistem kreću konstantnom brzinom, takodje, inercijalni sistemi.

Klasičan princip relativnosti tvrdi da su svi inercijalni sistemi ekvivalentni, te da se oblik fizičkih zakona ne sme menjati ako se oni izražavaju u raznim inercijalnim sistemima. Ovaj princip se može iskazati i tvrdnjom da apsolutna brzina nema smisla, jer se ni na koji način ne može izmeriti.

a. Galilejeve transformacije koordinata i klasično slaganje brzina

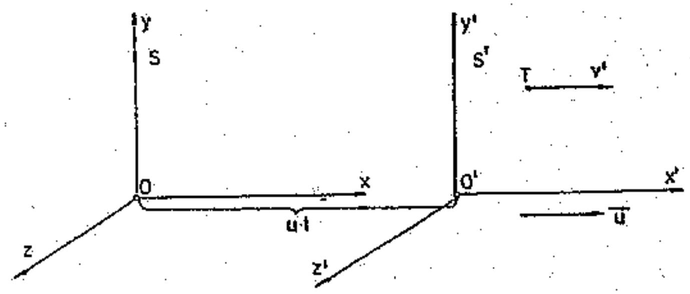
U osnovama klasične fizike leže pojmovi apsolutnog prostora i apsolutnog vremena. To znači da se uzima da postoji sistem koji apsolutno miruje u vasioni, pri čemu se kretanje u odnosu na njega naziva apsolutno kretanje. Što se tiče vremena, uzima se da za celu vasionu postoji jedno jedino vreme koje jednako teče u svim inercijalnim sistemima.

Univerzalnost vremena označava da vreme teče apsolutno, nezavisno od sistema iz kojeg se posmatranje vrši i zasniva se na pojmu apsolutne istovetnosti. Pod apsolutnom istovremenošću se podrazumeva da ako su neka dva dogadjaja istovremena u jednom sistemu, tada su istovremena i sa gledišta posmatrača u bilo kojem drugom sistemu, tj. u celoj vasioni.

Posmatrajmo dva inercijalna sistema S i S´ koji se jedan u odnosu na drugi kreću uniformno brzinom u (sl. 12.1).

Neka se telo T nalazi u odnosu na koordinatni sistem O´ na mestu x´, y´ i z´ u trenutku t´ i neka se kreće

brzinom v´ u odnosu na ovaj sistem (sistem S´).



Sl. 12.1

Postavlja se pitanje kako treba izračunati koordinate i brzinu ovog tela u odnosu na inercijalni sistem S ? Usvojimo merenje vremena od trenutka kada se tačke O i O´ poklapaju. Prema klasičnoj mehanici izmedju koordinata i vremena koji odredjuju dogadjaj u jednom i u drugom sistemu postoji sledeće relacije

$$x = x' + ut;\ y = y';\ z = z';\ t = t' \qquad (12.4)$$

Ovakve transformacije, koje se vrše pri prelasku iz jednog sistema u drugi, zovu se Galilejeve transformacije. Na ovaj način izvedeno posmatranje nekog dogadjaja u odnosu na drugi sistem koji se kreće zove se Njutnova relativnost. Jednačina $t = t'$ koja izgleda u ovom slučaju izlišna ukazuje na činjenicu da u klasičnoj fizici postoji samo jedno vreme u svim sistemima referencije.

Jedna od važnih posledica Galilejevih transformacija je klasični zakon sabiranja brzina. Naime, ako je v' brzina tela u odnosu na sistem S' koji se kreće brzinom $\underline{u}$ u odnosu na S, brzina istog tela, na osnovu navedenog zakona (12.4) u odnosu na sistem S koji miruje (sl. 12.1), iznosi

$$v = v' + u \qquad (12.5)$$

Kasnije ćemo videti da relacija (12.5), ma koliko se činila logičnom, nije primenljiva za kretanje sa brzinama bliskim brzini svetlosti. Ovaj klasični zakon sabiranja je dobar u slučajevima kada se tela kreću malim brzinama. Na primer, ako se voz u odnosu na okolinu kreće brzinom v_1, a putnik, u odnosu na voz, brzinom v_2, brzina putnika u odnosu na okolinu izvan voza iznosi $v_1 + v_2$, što je u saglasnosti sa iskustvom*.

12.2. Drugi Njutnov zakon

Sva tela se nalaze u medjusobnoj interakciji. Ova interakcija može biti direktna (medjusobnim dodirom) ili indirektna (putem polja). Posebno je teško razumeti interakciju tela putem polja. I sam Njutn je bio dugo kritikovan kada je kretanje planeta objasnio "dejstvom na daljinu". Rešenje opisa fizičkih polja i danas predstavlja jedan od centralnih problema fizike.

Fizička veličina kojom se opisuje interakcija medju telima naziva se silom.

Drugi Njutnov zakon definiše kakve posledice izaziva dejstvo sile na telo. *"Promena količine kretanja tela je proporcionalna sili koja deluje i vrši se u pravcu sile"*. Količinom kretanja zove se veličina $\vec{k} = m\cdot\vec{v}$, pa se drugi Njutnov zakon matematički izražava formulom

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\cdot\vec{v}) \qquad (12.6)$$

---

* *U poslednjoj relaciji znak "+" stoji ukoliko su smerovi kretanja putnika i voza isti, a znak "–" ukoliko su suprotni.*

koja za kretanje tela sa konstantnom masom prelazi u oblik

$$\vec{F} = m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = m\cdot\vec{a} \qquad (12.7)$$

Masa koja figuriše u ovim formulama zove se "inercijalnom masom" i predstavlja meru odupiranja tela promeni stanja kretanja.

Jedinica za silu je *1 N*.

a. Drugi Njutnov zakon u neinercijalnim (ubrzanim) referentnim sistemima

Kao što je već rečeno Njutnovi zakoni u do sada navedenim oblicima važe samo u inercijalnim referentnim sistemima.

Neinercijalni referentni sistemi se kreću ubrzano u odnosu na inercijalne referentne sisteme.

Razmotrimo mehaničke procese u neinercijalnim (ubrzanim) referentnim sistemima. Predpostavimo da jedan neinercijalni referentni sistem ima u odnosu na inercijalni referentni sistem ubrzanje $\vec{a}_r$. Ako je $\vec{a}'$ ubrzanje tela u odnosu na ubrzani referentni sistem, onda je ubrzanje $\vec{a}$ tela u odnosu na inercijalni sistem.

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_r \qquad (12.8)$$

te se II Njutnov zakon može napisati u obliku

$$m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{a}_r); \; \vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{a}_r)$$

ili

$$\vec{F} - m\vec{a}_r = m\vec{a}' \qquad (12.9)$$

gde je $\vec{F}$ "realna" sila koja dejstvuje na telo, a proizvod $-m\vec{a}_r$ tzv. "inercijalna" sila. Leva strana jednačine (12.9) predstavlja rezultantu "realne" i "inercijalne" sile i ova rezultantna sila je jednaka proizvodu mase tela i ubrzanja u odnosu na ubrzani neinercijalni sistem. Kada se ubrzanje $\vec{a}'$ meri u odnosu na jedan koordinatni sistem koji se kreće sa telom, tada je $\vec{a}' = 0$, dok $\vec{a}_r$ postaje ubrzanje tela $\vec{a}$ u odnosu na inercijalni sistem. Tada se jednačina (12.9) svodi na

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0; \ \vec{F} = m\vec{a}$$

što je identično sa jednačinom (12.7).

Navedimo jedan primer. Pre uzletanja, avion se kreće po pisti sa ubrzanjem od 1 m/s^2 u odnosu na Zemlju. Jedna stjuardesa, mase m = 60 kg, kreće se ubrzanjem od 0,5 m/s^2 prema kabini pilota u odnosu na avion.

Posmatrajmo najpre avion kao referentni sistem, a Zemlju kao inercijalni sistem. Ubrzanje referentnog sistema u odnosu na inercijalni sistem iznosi a_r = 1 m/s^2. Ubrzanje stjuardese u odnosu na ubrzani referentni sistem iznosi a'=0,5 m/s^2, a njeno ubrzanje u odnosu na Zemlju prema (12.8) je $a = a' + a_r =$ = 1,5 m/s^2. "Realna" sila koja dejstvuje na stjuardesu (od poda aviona) iznosi F = ma = 90 N, a "inercijalna" sila koja dejstvuje na nju je $-ma_r$ = 60 N. Rezultanta realne i inercijalne sile prema (12.9) jednaka je proizvodu mase stjuardese i njenog ubrzanja u odnosu na avion

$$90\ N - 60\ N = 30\ N = 60\ kg \times 0{,}5\ m/s^2$$

Ako bi se stjuardesa posmatrala kao referentni sistem, tada bi bilo a_r = 1,5 m/s^2 i a' = 0.

Razmotrimo i primer kretanja tela (kosmonauta) u avionu koji slobodno pada. Referentni sistem vezan za avion ima ubrzanje u odnosu na Zemlju kao inercijalni sistem $\vec{a}_r = \vec{g}$, te je "inercijalna" sila jednaka $-m\vec{g}$. Na posmatrano telo (kosmonauta) u avionu deluje "realna" gravitaciona sila $\vec{F} = m\vec{g}$. Na osnovu (12.9) dobijamo

$$m\vec{g} - m\vec{g} = m\vec{a} \quad \text{odnosno} \quad \vec{a} = 0$$

Posmatrano iz aviona, dato telo (kosmonaut) se ne ubrzava iako na njega deluje stalno "realna" gravitaciona sila. Ovo telo (kosmonaut) ne deluje nikakvom silom na avion i kaže se da ono lebdi. Ovakvo stanje tela naziva se "bestežinskim stanjem".

12.3. Treći Njutnov zakon

Treći Njutnov zakon bliže opisuje interakciju medju telima vodeći računa o oba tela koja su u interakciji.

Treći Njutnov zakon se može formulisati na sledeći način: *"Svakom delovanju (akciji) postoji uvek suprotno i jednako protivdelovanje (reakcija) odnosno, delovanja dva tela jedno na drugo su jednaka i suprotnog smera"*. Matematički

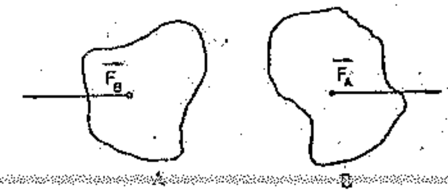
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad (12.10)$$

ili prema (12.7)

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \qquad (12.11)$$

Neka su ta dva tela A i B (Sl. 12.2). Ako telo A deluje na telo B silom $\vec{F}_A$, tada i telo B deluje na telo A silom $\vec{F}_B$, pri čemu je

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \qquad (12.12)$$

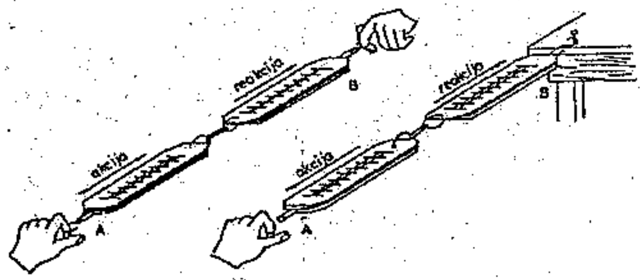


Sl. 12.2

Treba podvući da ove dve sile ne deluju na isto telo, inače bi u suprotnom rezultanta sila bila jednaka nuli.

Kvalitativno možemo ovaj zakon ilustrovati sledećim eksperimentom. Spojimo dva dinamometra kao na slici 12.3. i povucimo oba u suprotnim smerovima. Sila kojom dinamometar A vuče dinamometar B može se očitati na kazaljci dinamometra A. Na dinamometru B može se očitati sila kojom taj dinamometar vuče dinamometar A. Obe sile su jednake. Varijanta ovog eksperimenta je na desnoj strani. Sila kojom je vučen dinamometar A jednaka je (i suprotnog smera) sili kojom ekser vuče dinamometar B.

Posledice III Njutnovog zakona lako uočavamo kod interakcije tela slične mase. Tada su po jednačini (12.11) merljiva i njihova ubrzanja. Takav je slučaj na primer, pri



Sl. 12.3

pucanju iz artiljerijskog orudja ili puške, pri skoku iz čamca na obalu i slično. Često je, medjutim, masa jednog tela znatno veća. To je na primer slučaj kad odskočimo od tla ili kad kug- lica odskače od čvrste podloge. U tom slučaju ubrzanje Zemlje je, naravno, malo, pa opažamo samo odbijanje lakšeg tela.

Poznat je primer prividnog paradoksa zašto konj vuče kola. Po III Njutnovom zakonu sila kojom konj vuče kola jednaka je i suprotnog smera sili kojom kola vuku ko- nja. Reklo bi se dakle, da će se ove dve sile poništavati. No to nije tako, jer konj pokrene kola iz mirovanja. Objašnjenje je jednostavno: čvrsto se upirući o tlo, konj je čvrsto vezan sa Zemljom, dok kola, ako zanemarimo trenje, to nisu. Sila ko- jom kola deluju na konja deluje zapravo na sistem konj + Zemlja. III Njutnov zakon dakle kaže da je

$$m_{kola}\cdot a = (m_{konja} + M_{Zemlje})\cdot a'$$

Očito je masa u zagradi znatno veća, pa je $a \gg a'$, i konj vuče kola. Da je ovo razmatranje ispravno, vidimo kad nastupi po - ledica. Tada je veza konja sa Zemljom slaba, i u tom slučaju konj zaista ne može da vuče kola.

13. ZNAČAJ NJUTNOVIH ZAKONA U FIZICI

Nikad nije dovoljno isticati značaj Njutnovih zakona u fizici. Taj je značaj u prvom redu praktičan, jer je Njutn, svodeći medjudejstvo tela na koncizne matematičke formule, otvorio put mehanici i njenoj primeni u tehnologiji. No jednako je važno i naučno značenje tih zakona, što je rezultiralo u davanju novog značenja pojmovima sile i mase. Pojam sile potiče iz našeg delovanja na prirodu. Analogijom čovek je silom smatrao sve što se u prirodi ponaša poput delovanja njegovih mišića: elastična opruga, žice itd. Napeta elastična tetiva, jednako kao i mišići naše ruke, mogu izazvati promenu kretanja, ubrzati ili usporiti tela. Njutn je pojam sile proširio na medjudejstvo svih tela na Zemlji i u svemiru, na sile izmedju planeta i Sunca. Isto tako Njutn je uveo fizički pojam mase kao mere otpora nekog tela prema promeni kretanja. Pojam mase je blizak pojmu količine materije, ali nije s njim identičan. Njutn je verovatno bio svestan toga kada je formulisao svoj II zakon u obliku

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

a ne u eksplicitnijem (i praktično korisnijem) obliku

$$F = m\cdot a$$

Formulišući zakon sile pomoću vremenske promene količine kretanja, Njutn se možda ogradio od implikacije mogućih zaključaka o konstantnosti mase. Naime, masa kao otpor promeni brzine može zavisiti od te brzine. Činjenica je da tu zavisnost nismo dugo vremena bili u stanju da opazimo; no, ona nije isključena u Njutnovoj formulaciji II zakona mehanike.

Naravno, postavljanje pojma sile na prvo mesto u fizici ne može proći bez odredjene kritike. U prvom redu može se reći da pri dinamičkom delovanju sile mi *direktno* opažamo samo ubrzanja i usporavanja, a da same sile ne opažamo. Pojam sile koja deluje na daljinu, privlačenje dvaju tela kroz vakuum svemirskog prostora, mogao je Njutnovim savremenicima izgledati sasvim neprihvatljiv. I kasnije je postojala čitava škola fizičara, pozitivisti, koji su se priklanjali mišljenju da je sila samo zgodan naziv za proizvod mase i ubrzanja.

Ne može se, medjutim, poreći da se fizičko značenje sile zasniva na medjusobnom dejstvu tela u prirodi, u prvom redu mogućnosti da se ispravno proračuna njihov medjusobni položaj i kretanje. Naravno, i Njutnu je bilo jasno da se celokupnost pojava povezanih s pojmom sile može shvatiti samo u uzajamnom dejstvu dvaju tela jedno na drugo. U svetu zapravo postoje samo uzajamna dejstva. Da bi naglasio uzajamnost dejstva (sile izmedju dva tela), Njutn je dodao zakonu kretanja zakon akcije i reakcije, koji matematički precizira tu uzajamnost. Tek principom akcije i reakcije dobijaju Njutnovi zakoni kretanja potpuni fizički smisao.

U formalnom pogledu, koncipirajući svoje zakone aksiomatski*, Njutn se ugledao na antičke uzore, u prvom redu na Euklida. On je, medjutim, svojim aksiomima dao moderan sadržaj. Njegova genijalnost ogleda se u tome što je uspeo da odvoji bitno od nebitnog i pruži i formalni okvir za rešavanje problema iz mehanike. Nema, u principu, ni jednog problema kretanja koji se ne bi mogao rešiti uz pomoć Njutnovih zakona. Naravno, mnoga rešenja u praksi su veoma komplikovana, što zavisi od matematičkog izraza za silu. No univerzalna shema data diferencijalnom jednačinom (12.6) primenljiva je na svaki slučaj, bez obzira na komplikovanost matematičkog izraza za silu.

Danas su u prirodi poznata četiri osnovna tipa medjudejstva medju česticama. To je u prvom redu gravitaciona sila, zatim elektormagnetne sile, te napokon vrste sila koje su karakteristične za medjudejstvo izmedju elementarnih, suba-

---

** U ovom smo poglavlju, a i u daljem tekstu udžbenika ćemo često koristiti naoko suprotne nazive "Njutnovi aksiomi" i "Njutnovi zakoni". Temeljna pravila o kretanju i silama postavio je Njutn u obliku aksioma, tj. temeljnih konstatacija iz kojih je izvodio ostale zakone. Medjutim, ispravnost tih aksioma je danas toliko puta proverena, a njihova upotreba tako opšta, da se za njih uobičajio naziv osnovnih zakona mehanike.*

tomskih čestica, tzv. slabe interakcije i jake interakcije. Dok su sile slabe interakcije uočene kod beta-raspada radioaktivnih jezgara, jake interakcije u suštini su sile koje drže nukleone na okupu. Istini za volju treba reći da, iako o silama znamo mnogo, a gravitacionim i električnim silama znamo i matematički oblik, o prirodi i dubokom uzroku tih osnovnih sila možemo reći malo. Za elektromagnetne sile znamo odavno da potiču od izmene fotona, kvanata elektromagnetnog polja, a od nedavno su nam poznati i kvanti nosioci slabih nuklearnih sila. To su intermedijarni bozoni, čestice nazvane Z^0 i $W^{\pm}$. Gravitacione sila predstavljaju još uvek problem opšte teorije relativnosti, a nismo blizu ni potpunom razumevanju jakih sila izmedju nuklearnih i subnuklearnih čestica.

Osnovni podaci o četiri osnovne sile u prirodi dati su u tabeli 13.1. Brojke u drugom stupcu daju relativnu jačinu tih sila. Naravno, kako se radi o sasvim različitim silama koje deluju medju različitim česticama, te brojke treba uzeti samo kao indikaciju. Tako će na primer, gravitaciona sila izmedju dva elektrona biti 10^{38} puta slabija ($10^{-2}/10^{-40}$), od elektromagnetne, dok se o jakom medjudejstvu izmedju dva elektrona ne može govoriti. Ono postoji samo medju teškim česticama, na primer protonima, neutronima itd. Jako medjudejstvo izmedju na primer jednog protona i jednog neutrona je čak 10^{40} puta jače od gravitacionog, ali domet te sile je veoma mali, te se jaka sila (kao i slaba) ispoljava samo u domenu atomskkog jezgra.

TABELA 13.1. Četri osnovne sile u prirodi

Medjudejstvo	Jačina	Zakoni
gravitacija	10^{-40}	zakoni su poznati
slabo medjudejstvo	10^{-5}	zakoni su uglavnom poznati
elektromagnetizam	10^{-2}	zakoni su poznati
jako medjudejstvo	10^{0}	zakoni su delimično poznati

Tabela 13.1. pokazuje da su, grubo uzevši, nuklearne sile (jako medjudejstvo) najjače od svih medjudejstava u prirodi, a gravitacione su najslabije. One se ogledaju samo u prisustvu velikih masa.

Sledeći korak u shvatanju prirode je nastojanje da se sve te sile svedu na manje-više zajednički uzrok. To je zadatak tzv. *ujedinjene teorije polja*. Prva ujedinjena teorija polja pojavila se još krajem XIX veka, kada je Maksvel postavio teoriju elektromagnetnog polja, koja u svom okviru ujedinjuje električne, magnetne i niz svetlosnih pojava. Danas se ovo otkriće, kome još uvek jedva da ima premca u istoriji nauke, nastoji proširiti na taj način [illegible] istom teorijskom opisu obuhvate i elektromagnetne i slabe sile. Poslednjih godina su na tom području Weinberg, Glashow i Salam* i drugi fizičari postigli značajne uspehe, pa danas možemo sa sigurnošću reći da je ta delimična sinteza krunisana uspehom. Defenitivni dokaz ispravnosti ujedinjene teorije elektromagnetnih i slabih nuklearnih sila, u tzv. elektroslabe sile je eksperimentalno otkriće već spomenutih intermedijarnih bozona Z^0 i $W^{\pm}$, koje su krajem 1982. godine u evropskom nuklearnom centru (CERN) u Ženevi, otkrili Rubia** i saradnici***

Još je dug put do uključivanja jakih ("nuklearnih" i gravitacionih sila u zaj[illegible] sa slabim i elektromagnetnim. Na tom putu jedva da smo preval[illegible]etne korake, a nije čak jasno da li je takvo ujedinjenje uopšte i moguće.

---

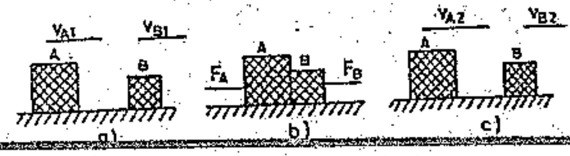
* *Steven Weinberg i Sheldon Glashow, američki fizičari, i Abdus Salam, britanski fizičar pakistanskog porekla, dobitnici su Nobelove nagrade 1979. godine za radove na ujedinjenju osnovnih medjudejstava (sila) u prirodi.*

** *Carlo Rubbia, dobitnik Nobelove nagrade 1984. godine za fiziku.*

*** *Detaljnije objašnjenje osnovnih interakcija dato je u drugom delu ovog udžbenika u oblasti FIZIČKE POJAVE U MIKROSVETU.*

14. IMPULS SILE I KOLIČINA KRETANJA

Na slici 14.1.a telo A, koje klizi po podlozi bez trenja, stigne telo B, udari u njega (sl. 14.1.b) i, nakon uzajamnog dejstva, oba tela nastave kretanja promenjenim brzinama (sl. 14.1.c).



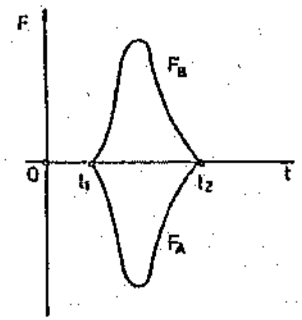
Sl. 14.1

Uočili smo da je za vreme sudara došlo do uzajamnog dejstva izmedju dva tela, tj. da je telo A delovalo na telo B silom $\vec{F}_B$, a telo B delovalo na telo A silom $\vec{F}_A$. Te su sile prema III Njutnovom zakonu medjusobno jednake i suprotnog smera, pa se može napisati

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

Iz iskustva znamo da te sile nisu konstantne. One su manje u prvim trenucima sudara, zatim rastu do neke maksimalne vrednosti i onda opet opadaju do nule. Ceo opisan proces se dešava za vrlo kratko vreme, pa se teško može pratiti eksperimentalnim metodama. Sve takve sile koje su jake, a kratkotrajne, zovu se impulsne sile. Uopšte uzev, promena impulsnih sila u toku vremena može da bude različita. Približan oblik sila uzajamnog dejstva dva tela pri sudaru prikazan je na slici 14.2. Bitno je uočiti, da su bez obzira na njihovo trajanje, sile $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ u svakom trenutku jednake. Prema II Njutnovom zakonu sile $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ biće

$$\vec{F}_A = m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} \quad i \quad \vec{F}_B = m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$



Sl. 14.2

Za vrlo kratko vreme dt važiće

$$\vec{F}_A\, dt = m_A\, d\vec{v}_A \;\; i \;\; \vec{F}_B\, dt = m_B\, d\vec{v}_B \qquad (14.1)$$

Kako relacije (14.1) moraju važiti za svaki infinitezimalni vremenski interval od početka do dodira i odvajanja, može se napisati

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt = \int_{\vec{v}_{A1}}^{\vec{v}_{A2}} m_A d\vec{v}_A \;;\; \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B dt = \int_{\vec{v}_{B1}}^{\vec{v}_{B2}} m_B d\vec{v}_B \qquad (14.2)$$

Masa tela A i B nije se menjala pri sudaru, te je

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt = m_A\vec{v}_{A2} - m_A\vec{v}_{A1} ;\; \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B dt = m_B\vec{v}_{B2} - m_B\vec{v}_{B1} \quad (14.3)$$

Integral sile po vremenu, u kojem ta sila deluje, naziva se impuls sile ($\vec{p}$)

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \qquad (14.4)$$

Za specijalni slučaj konstantne sile, koja na telo deluje odredjeno vreme t, važi

$$\vec{p} = \int_{t=0}^{t} \vec{F} dt = \vec{F} t \qquad (14.5)$$

Kako se proizvod mv naziva količina kretanja, to izrazi na desnoj strani jednačina (14.3) predstavljaju promene količine kretanja $\Delta\vec{K}$, odnosno

$$m_A\vec{v}_{A2} - m_A\vec{v}_{A1} = \Delta\vec{K}_A \;\; i \;\; m_B\vec{v}_{B2} - m_B\vec{v}_{B1} = \Delta\vec{K}_B \quad (14.6)$$

Na osnovu (14.4) i (14.6) jednačine (14.3) mogu da se napišu u obliku

$$\vec{p}_A = \Delta\vec{K}_A \;\; i \;\; \vec{p}_B = \Delta\vec{K}_B \qquad (14.7)$$

ili uopšteno

$$\vec{p} = \Delta\vec{K} \qquad (14.8)$$

tj. impuls sile jednak je promeni količine kretanja koju ta sila uzrokuje.

15. ZAKON ODRŽANJA KOLIČINE KRETANJA

Skup od dva ili više tela nazivamo sistem tela. U zavisnosti od sila koje dejstvuju na sistem, sistemi mogu biti zatvoreni i otvoreni.

Zakon održanja količine kretanja detaljnije će biti proučen u dva slučaja:

a. Za zatvoren sistem

U slučaju kada sile koje deluju na sistem potiču samo od uzajamnog dejstva tela, a delovanje spoljašnjih sila ne postoji (spoljašnje sile potiču od tela izvan sistema) kaže se da je sistem zatvoren.

Posmatrajmo zatvoren sistem od dva tela mase m_1 i m_2 koja se kreću brzinama $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ i koja interaguju silama $\vec{f}_1$ i $\vec{f}_2$. Sile kojima ta tela deluju jedno na drugo jednake su, te je po III Njutnovom zakonu

$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2 \qquad (15.1)$$

Ukupna količina kretanja sistema prema II Njutnovom zakonu menja se po pravilu

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \qquad (15.2)$$

Iz (15.1) i (15.2) sledi

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0 \qquad (15.3)$$

a odatle integraljenjem

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = const. \text{ ili } \sum_{i=1}^{2} m_i\vec{v}_i = const. \qquad (15.4)$$

Drugim rečima, u zatvorenom sistemu u kojem postoje samo dva tela u interakciji, zbir količina kretanja je konstantan. Ovaj zaključak važi samo za unutrašnje sile za koje važi III Njutnov zakon. Medjutim, u prirodi je poznato da postoje interakcije za koje ne važi III Njutnov zakon (npr. za čestice koje interaguju sa Lorencovom silom).

Zaključak se lako da proširiti i na sistem od n tela koja interaguju. Tada je prema (15.4)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = const. \qquad (15.5)$$

tj. ukupna količina kretanja zatvorenog sistema ne menja se tokom vremena. Jednačina (15.5) predstavlja matematički izraz zakona održanja ukupne količine kretanja zatvorenog sistema tela.

b. Za otvoren sistem

Posmatrajmo otvoren sistem od dva tela na koji deluju, sem unutrašnjih sila $\vec{f}_1$ i $\vec{f}_2$, koje su prema (15.1) jednake i spoljašnje sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. U tom slučaju je

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad (15.6)$$

ili

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{2} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{2}\vec{F}_i; \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i = \sum_{i=1}^{2}\vec{F}_i \qquad (15.7)$$

Primenom jednačine (15.7) na sistem od n tela, dobijamo

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{K}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

ili

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{K}_i(t) = \int\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i dt + C \qquad (15.8)$$

Iz (15.8) pod uslovom da je

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \vec{F}_R = const.$$

dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i(t) = \vec{F}_R t + C \qquad (15.9)$$

gde je $\vec{F}_R$ rezultanta svih spoljašnjih sila. Ako predpostavimo da je u početnom trenutku t=0 ukupna količina kretanja sistema bila

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i(0)$$

dobićemo

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i(t) - \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i(0) \equiv \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i\right) = \vec{F}_R t \qquad (15.10)$$

Na osnovu (15.10), gde je $\vec{F}_R t$ impuls rezultujuće sile ($\vec{p}$), može se zaključiti da je promena ukupne količine kretanja ($\Delta\vec{K}_i$) otvorenog sistema jednaka impulsu rezultante spoljašnjih sila ($\vec{p} = \Delta\vec{K}_i$).

Jedinice impulsa ($\vec{p}$) i količine kretanja ($\vec{K}$) su iste: $kgms^{-1}$.

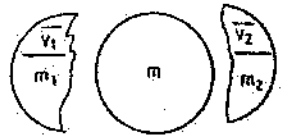
c. Primeri primene zakona održanja količine kretanja

1. Pri eksploziji, mina (mase m) se raspadne na dva komada (mase m_1 i m_2), koji se kreću u horizontalnim pravcima, kao što je prikazano na slici 15.1. Komad mase m_2 kreće se brzinom $\vec{v}_2$. Da bi se odredila veličina i smer brzine $\vec{v}_1$ polazi se od izraza (15.4). Pre eksplozije je ukupna količina kretanja sistema

$$m \cdot \vec{v} = 0 \qquad (15.11)$$

a posle eksplozije

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \qquad (15.12)$$



Sl. 15.1

Na osnovu zakona (15.5) je

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \quad (15.13)$$

što daje

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2\frac{m_2}{m_1} \qquad (15.14)$$

2. Analizirajmo primer iz odeljka 14. prikazan na slici 14.1. Kako je po III Njutnovom zakonu

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B\,.$$

u svakom trenutku je

impuls sile F_A = − impuls sile F_B

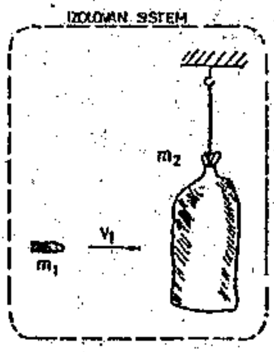
Kako je impuls sile jednak razlici količine kretanja na kraju i početku delovanja sile, to je

$$m_A v_{A2} - m_A v_{A1} = -(m_B v_{B2} - m_B v_{B1})$$

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$$

Leva strana je ukupni impuls sistema pre sudara, a desna nakon sudara. Poslednja jednačina, dakle, pokazuje da se ukupni iznos količine kretanja nije tokom sudara izmenio, što je u skladu sa (15.5).

3. Posmatrajmo metak, mase m_1, koji se nakon ispaljenja kreće brzinom v_1 i udara u vreću napunjenu peskom, mase m_2, koja je okačena da visi (sl. 15.2). Usled udara metka u vreću, vreća će dobiti izvesnu količinu kretanja i brzinu v, koja se može odrediti primenom zakona održanja količine kretanja na sistem metak-vreća. Pre udara metka količina kretanja metka je m_1v_1, a posle udara sistem ima količinu kretanja $(m_1 + m_2)v_2$. Pošto su ove dve količine kretanja jednake, sledi



Sl. 15.2

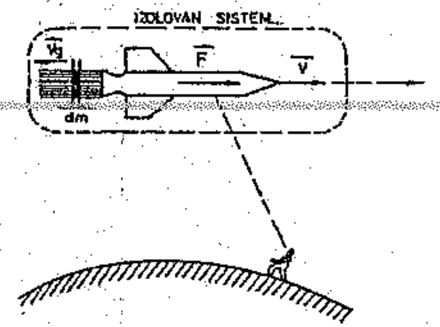
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v_2$$

odakle proizilazi

$$v_1 = v_2\, \frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

Kako je $m_1 << m_2$ to je $v_1 \approx v_2\, \frac{m_2}{m_1}$.

4. Kretanje rakete i kosmičkih brodova. Zakon održanja količine kretanja primenićemo na kretanje rakete, pri čemu se ona nalazi van osetnog uticaja gravitacionog polja Zemlje (sl. 15.3). Izolovani sistem, u ovom slučaju, čine raketa i gasovi koji se izbacuju iz rakete kao proizvodi sagorevanja.



Sl. 15.3

Ako, zbir masa konstrukcije rakete i goriva koje se u njoj nalazi u trenutku t obeležimo sa $m = m(t)$, a brzinu kretanja ove mase u tom trenutku vremena sa $v_r = v_r(t)$, tada količina kretanja posmatranog sistema iznosi

$$K(t) = m v_r \qquad (15.15)$$

Tokom izčezavajuće kratkog intervala vremena dt raketa ispusti masu dm produkata sagorevanja. U procesu sagorevanja ovi produkti sagorevanja mase dm u odnosu na raketu dobijaju brzinu v_g, koja zavisi od tipa goriva i načina sagorevanja, ali se ne menja u vremenu. Za račun izbačenih produkata sagorevanja brzina rakete se promeni za veličinu dv_r tako da u trenutku t+dt iznosi $v_r + dv_r$ *. Masa konstrukcije rakete i preostalog goriva je m+dm, pri čemu je dm<0. Na osnovu ovoga zaključujemo da je u trenutku t+dt količina kretanja sistema koji se sastoji od rakete i izbačenih produkata sagorevanja data sa**

$$K(t+dt) = (m+dm)(v_r + dv_r) + [v_g - (v_r + dv_r)]dm; \quad dm < 0 \qquad (15.16)$$

Na osnovu zakona o održanju količine kretanja (15.4) važi da je

$$K(t) = K(t+dt)$$

odnosno prema (15.15) i (15.16)

$$m v_r = (m+dm)(v_r + dv_r) + (v_g - v_r - dv_r)\cdot dm$$

ili

$$m\, dv_r + v_g\, dm = 0 \qquad (15.17)$$

Ako se u izrazu (15.17) razdvoje promenljive m i v_r, on se može napisati u obliku

$$dv_r = -\, v_g\, \frac{dm}{m} \qquad (15.18)$$

U trenutku t_0 ispaljivanja rakete njena brzina je ravna nuli. Ukupnu masu konstrukcije rakete i goriva u njoj u trenutku t_0 označićemo sa M. Na osnovu ovoga, relacija (15.18) se može

---

Pošto se kretanje rakete i produkata sagorevanja vrši po istom pravcu, nema potrebe za uvodjenje vektorskih oznaka.

***Brzina kretanja produkata sagorevanja mase dm u odnosu na posmatrača sa Zemlje predstavlja razliku brzine v_g koju produkti sagorevanja dobijaju u procesu sagorevanja i brzine $v_r + dv_r$ koju u trenutku t+dt ima raketa.*

$$\int_0^{v_r(t)} dv = -v_g \int_M^{m(t)} \frac{dm}{m}$$

odakle sledi konačni izraz za brzinu rakete u momentu t

$$v_r(t) = v_g \, ln \frac{M}{m(t)} \qquad (15.19)$$

Prema (15.19) zaključujemo da je brzina rakete proporcionalna brzini produkata sagorevanja koju ona ispusti tokom leta. Za danas poznata goriva brzina v_g iznosi oko 3 *km/s*. U optimalnom slučaju gorivo sačinjava 90% odnosno 9/10 mase M, pa ako se ono potpuno iskoristi tokom leta onda je m(t) = M/10, gde je t moment kada je sve gorivo iskorišćeno. Za ovaj slučaj izraz (15.19) daje

$$max \; v_r(t) = v_g \, ln10 = 3 \, ln10 = 3\cdot 2{,}3=7 \; km/s \qquad (15.20)$$

Brzina sa vrednošću iz (15.20) nije dovoljna da raketu izvede iz polja Zemljine teže, pa se zato pri lansiranju sa Zemlje moraju koristiti višestepene rakete.

Vidimo da je brzina izbacivanja pogonskog sredstva važan ograničavajući faktor u maksimalnoj brzini rakete i odavde potiče ideja da se u budućnosti prave rakete koje će reaktivnu silu ostvarivati izbacivanjem svetlosnih kvanata – fotona.

Deljenjem (15.17) sa dt, dobija se

$$m \frac{dv_r}{dt} + \frac{dm}{dt} v_g = 0 \qquad (15.21)$$

Član dv_r/dt je ubrazanje rakete $\underline{a}$, te je prvi član u (15.21) proizvod ma i predstavlja reaktivnu silu rakete F, pa je

$$F = -\frac{dm}{dt} v_g \qquad (15.22)$$

tj. pogonska sila rakete srazmerna je izbačenoj masi gasa u jedinici vremena dm/dt i brzine v_g isticanja gasova.

Pri startu APOLA 11 (koji je odneo kosmonaute na Mesec) raketni motori su izbacivali 12 tona sagorelih gasova u svakoj sekundi ($dm/dt = 12\cdot 10^3$ *kg/s*), razvijajući pogonsku silu od $3{,}2\cdot 10^7$ *N*. Na osnovu ovih podataka izlazi da je brzina isticanja gasova $v_g = 2700$ *m/s*.

Pošto se kretanje raketa zasniva na zakonu održanja količine kretanja, to znači da se one mogu kretati kroz bezvazdušni prostor. To je tzv. princip reaktivnog pogona. Naime, reaktivni pogon je jedino mogući pogon u astronautici.

16. DINAMIKA KRUŽNOG KRETANJA

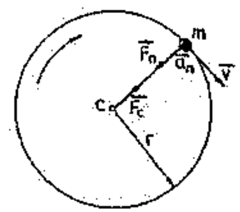
16.1. Sile kod kružnog kretanja

Neka se telo mase m (sl. 16.1) ravnomerno kreće (v=*const.*) oko jedne nepomične tačke C po krugu poluprečnika r. Pri ovakvom kretanju postoji samo normalno (radijalno) ubrzanje $\vec{a}_n$ jednako prema (8.4)

$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{r}\vec{r}_0 \qquad (16.1)$$

Na osnovu II Njutnovog zakona može da se zaključi da ovo ubrzanje treba da je posledica sile

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = -\frac{mv^2}{r}\vec{r}_0 \qquad (16.2)$$



Sl. 16.1

koja je usmerena ka centru rotacije. Ova sila se naziva centripetalnom silom koja svojim dejstvom vuče telo prema centru i savija njegovu putanju. Ona, naravno, nije neki poseban tip sile koja je svojstvena samo kružnom kretanju. Naziv centripetalna odnosi se zapravo na njen efekat da stalno privlači telo ka centru obrtanja. To mogu biti elastične sile u nekoj šipki, opruzi ili zategnutom koncu, dalje to može biti sila teže, električna i magnetna sila. Kod kretanja planeta oko Sunca, centripetalna sila dolazi od privlačenja masa (gravitacije). Centripetalna sila ne vrši rad, jer njen pravac uvek zaklapa sa pravcem kretanja ugao od $\pi/2$.

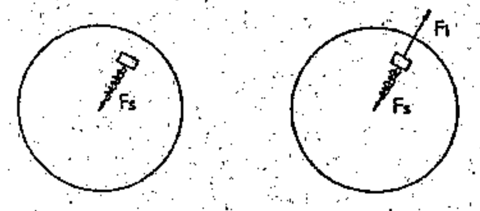
Ako ova sila nije dovoljna da telo sa odredjenom brzinom v održi na putanji poluprečnika r, telo prelazi na putanju sa većim poluprečnikom. Ako se delovanje ove sile prekine, telo nastavlja da se kreće pravolinijski u smeru tangente na kružnicu po kojoj se vrtelo, sa brzinom koju je imalo u tom trenutku.

U inercijalnom referentnom sistemu pojavljuje se kod rotacije isključivo centripetalna sila koja vuče telo ka centru. Ta sila je odgovorna za rotaciju, jer daje radijalno ubrzanje koje zakrivljuje putanju tela. Na osnovu III Njutnovog zakona može se zaključiti da na telo koje je izvor centripetalne sile $\vec{F}_n$ deluje i odgovarajuća sila reakcije $\vec{F}_c$ (sl. 16.1). Ova sila reakcije dejstvuje na centar, istog je intenziteta i pravca, a suprotnog smera i naziva se centrifugalnom silom. Očigledno je $\vec{F}_c = -\vec{F}_n$. Ali ne treba zaboraviti da se navedena ravnoteža ne odnosi na telo koje se obrće, već na telo (šipku, konac) koje ga spaja sa centrom obrtanja. Kao što će se videti u sledećem odeljku postoji i centrifugalna inercijalna sila koja je fiktivna sila i koja se uvodi da bi se opisalo kretanje tela u neinercijalnom sistemu.

16.2. Sile u referentnom sistemu koji rotira ravnomerno

Sva izlaganja izneta u 16.1. važe u inercijalnom sistemu referencije, odnosno za posmatrača koji stoji van tela koje rotira. Nešto se drugačije okolnosti javljaju ako se posmatrač okreće zajedno sa telom.

Neka se telo mase m nalazi izvan ose rotacije na horizontalnom podu rotirajuće platforme (sl. 16.2) i neka je vezano elastičnom oprugom za centar rotacije. Sile koje deluju na telo u sistemu koji jednoliko rotira analiziraćemo sa stanovišta posmatrača koji miruje i nalazi se van platforme i sa stanovišta posmatrača koji se nalazi na sredini platforme i rotira zajedno sa telom.



a)   b)

Posmatrač, koji se nalazi izvan platforme, uočava da telo jednoliko kruži oko središta platforme pod dejstvom sile elastične opruge $\vec{F}_s$, koja deluje prema središtu platforme (sl. 16.2.a).

Uzmimo sada da se posmatrač rotira zajedno sa telom na platformi. Za njega telo miruje. S druge strane, on uočava da je opruga rastegnuta uvek konstantnom silom, tj. da opruga deluje konstantnom silom na telo (sl. 16.2.b). Kako telo uprkos svemu miruje, posmatrač mora zaključiti da na telo deluje još jedna sila koja poništava delovanje opruge. Ta sila mora po intenzitetu biti jednaka sili opruge (centripetalnoj), a po smeru mora biti suprotna. Na osnovu II Njutnovog zakona može da se napiše da je za posmatrača izvan platforme (inercijalni sistem)

$$\vec{F}_s = -\frac{mv^2}{r}\vec{r}_0 \tag{16.3}$$

a za posmatrača koji rotira na platformi (rotirajući sistem)

$$\vec{F}_s + \vec{F}_i = 0 \tag{16.4}$$

Sa $\vec{F}_i$ označena je dodatna sila koja deluje na telo u neinercijalnom sistemu. Uporedjivanjem jednačina (16.3) i (16.4) proizilazi

$$\vec{F}_i = \frac{mv^2}{r}\,\vec{r}_0 \qquad (16.5)$$

tj. dodatna sila ima istu vrednost kao i centripetalna. Ta sila predstavlja tzv. inercijalnu silu, koju prema njenom delovanju (od centra van) nazivamo centrifugalnom inercijlanom silom.

Ova centrifugalna sila se pojavljuje samo u (neinercijalnom) sistemu koji rotira. To je, dakle, zamišljena sila koje nema u (mirujućem) inercijalnom sistemu, a koju dodajemo u neinercijalnom sistemu da bi se sačuvala važnost II Njutnovog zakona. Posmatrač na platformi opaža dakle silu koja je teže oprugu prema van (centrifugalnu silu). Istu silu opaža i putnik u automobilu u krivini (sila ga izbacuje prema spoljašnjem delu krivine, tj. u smeru radijusa krivine), kao i astronaut koji u veštačkom satelitu kruži oko Zemlje. Sa njegovog stanovišta na svaki predmet u satelitu deluju dve sile: privlačna sila Zemlje, koja ga vuče radijalno prema Zemlji i centrifugalna sila koja ga tera radijalno od Zemlje. Kako se satelit zadržava na konstantnoj udaljenosti od Zemlje, rezultanta tih dveju sila mora biti jednaka nuli. Prema tome, za astronauta svi predmeti lebde u satelitu, tj. oni su bez težine. S druge strane, posmatrač izvan satelita reći će da svi predmeti u satelitu izgledaju kao da nemaju težine, zato što svi imaju jednako ubrzanje.

Ako posmatrač u neinercijalnom sistemu želi da primeni II Njutnov zakon, tada mora uključiti delovanje inercijalne sile $\vec{F}_i = m\vec{a}_r$

Prema tome, za posmatrača u neinercijalnom sistemu II Njutnov zakon glasiće: *zbir svih realnih sila ($\Sigma\vec{F}$) i inercijalne sile $\vec{F}_i$ jednak je proizvodu mase i ubrzanja*

$$\Sigma\vec{F} + \vec{F}_i = m\cdot\vec{a} \qquad (16.6)$$

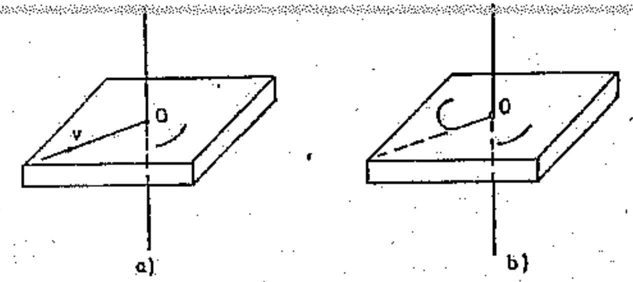
ili u skalarnom obliku

$$\Sigma F - m\cdot a_r = m\cdot a \qquad (16.7)$$

gde je F "realna" sila koja deluje na telo, a_r ubrzanje referentnog sistema prema inercijalnom i a ubrzanje tela prema referentnom (neinercijalnom) sistemu.

Kao što smo već rekli izraz (16.6) je najopštija formulacija II Njutnovog zakona, koji važi za svakog posmatrača, bez obzira da li se nalazi u inercijalnom ili neinercijalnom sistemu. Za specijalan slučaj da se inercijalne i neinercijalne sile kompenzuju, ubrzanje a=0, tela miruju (ili se kreću jednoliko po pravcu) u neinercijalnom sistemu.

Proučimo još jedan primer inercijalne sile, koja se javlja pri kretanju tela u sistemu koji rotira. Neka posmatrač, koji se nalazi na osi rotacije rotirajuće platforme (sl. 16.3), baci kuglu nekom početnom brzinom tako da se bez trenja kotrlja po podu. Za posmatrača van platforme (inercijalni sistem) kretanje će biti pravolinijsko sa stalnom



Sl. 16.3

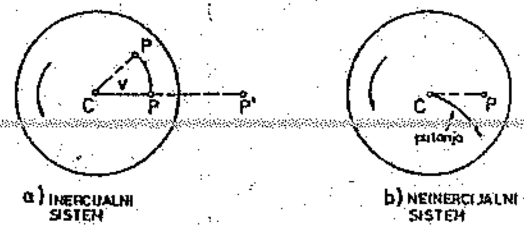
brzinom v (sl. 16.3.a), dok će za posmatrača na platformi (neinercijalni sistem) ovo kretanje biti krivolinijsko i to ubrzano (sl. 16.3.b). Kugla će skrenuti od pravca početne brzine i to suprotno od smera rotacije. Posmatrač na platformi zaključuje da na kuglu deluje sila koja je upravna na pravac početne brzine. Ta sila, koja skreće kuglu od pravca po kojem bi trebalo po inerciji da se kreće, zove se Koriolisova sila i data je izrazom

$$F_K = 2\, m\omega v_r \qquad (16.8)$$

ili u vektorskom obliku

$$\vec{F}_K = -\,2\, m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) \qquad (16.9)$$

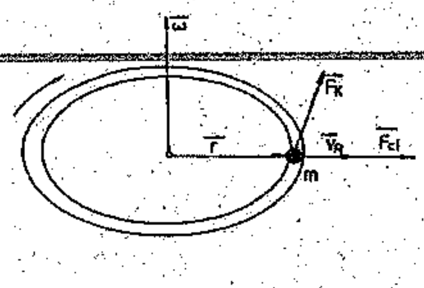
gde je v_r – relativna brzina tela u odnosu na sistem koji se obrće. Značenje Koriolisove sile može se uočiti i na primeru prikazanom na slici 16.4. Posmatrač u središtu C rotirajuće ploče usmeri i opali hitac prema tački P na ploču u času kad



Sl. 16.4

se tačka P nalazi na istom pravcu kao i tačka P' izvan ploče. Tako opaljen metak neće, medjutim, pogoditi cilj u P jer će se u vremenu $t = \overline{CP}/v$, potrebnom da metak predje put $\overline{CP}$, tačka P zarotirati u novi položaj P_1. Za posmatrača koji se ne nalazi na rotirajućoj ploči (tj. posmatrač u inercijalnom sistemu - sl. 16.4.a) ovo je razlog zbog kojeg metak nije pogodio P i on neće uvoditi nove sile da to objasni. Medjutim, posmatrač koji se nalazi na rotirajućoj ploči (tj. čiji je referentni sistem neinercijalan, kao npr. naš na Zemlji) uočiće da nije pogodio cilj P, jer metak nije putovao po pravcu, već je opisao zakrivljenu putanju. Za njega će, dakle (u neinercijalnom sistemu sl. 16.4.b), rezultat biti identičan kao da je na metak delovala sila (Koriolisova sila) normalna na smer kretanja.

Iz navedenih primera vidi se da se Koriolisova sila pojavljuje u neinercijalnom referentnom sistemu kad god telo ima komponentu brzine po smeru normalnom na smer ose rotacije sistema (sl. 16.5).



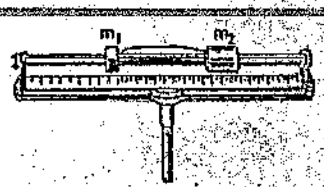
Sl. 16.5

Na Zemlji će se delovanje Koriolisove sile osetiti, na primer pri kretanju u smeru sever-jug na većim geografskim širinama. Tako reke koje imaju približno pravac sever-jug skreću na zapad. Usled Koriolisove sile javlja se i skretanje severnih vetrova ka zapadu. Premda su te sile slabe, ipak one imaju značajnu ulogu u kretanju Zemljine atmosfere. U balistici se mora voditi računa o pojavi Koriolisove sile, kada postoji komponenta kretanja u pravcu Zemljinog meridijana. Koriolisova sila se pojavljuje i u atomskim dimenzijama kod tzv. diatomskih molekula, a postoje indikacije da se u atomskim jezgrima izvesne pojave mogu protumačiti delovanjem Koriolisove sile.

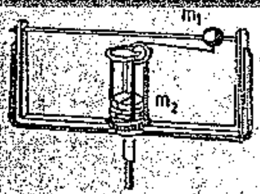
17. PRIMERI I ZNAČAJ CENTRIFUGALNIH INERCIJALNIH SILA

Centrifugalne inercijalne sile imaju veliki značaj za objašnjenje nekih pojava u prirodi, za različite primene u tehnici i svakodnevnom životu. Kao primere navešćemo sledeće:

1. Na dvema horizontalnim šipkama (sl. 17.1) postavljene su lako pokretne mase m_1 i m_2, koje su medjusobno vezane. Kada se mašina stavi u pogon, na telo veće mase m_2 dejstvuje veća centrifugalna inercijalna sila, tako da ono privuče manju masu m_1. Centrifugalne sile, koje dejstvuju na oba



Sl. 17.1



Sl. 17.2

tela (zategnutost konca), medjusobno su uvek jednake a suprotnog smera, te se uzajamno poništavaju.

2. Na aparatu (sl. 17.2) manja masa m_1 diže veću masu m_2 kad se aparat dovoljno brzo obrće. Tada centrifugalna inercijalna sila, mase m_1, koja se preko užeta prenosi na masu m_2, postane veća od sile teže, koja dejstvuje na masu m_2. Ako je m_2 jednom podignuta, primećuje se da ponovo pada pri manjoj brzini obrtanja od brzine potrebne za njeno podizanje. To se objašnjava povećanjem razdaljine mase m_1 pri podizanju od osovine obrtanja, na osnovu čega je porasla i vrednost centrifugalne inercijalne sile.

3. Kada se u sudu koji rotira nalazi neka tečnost (sl. 17.3.a), onda tečnost pri obrtanju dobija izdubljen oblik

(presek u vertikalnoj ravni je parabola). Pri stalnom broju obrta tečnost je u ravnoteži pod dejstvom centrifugalne

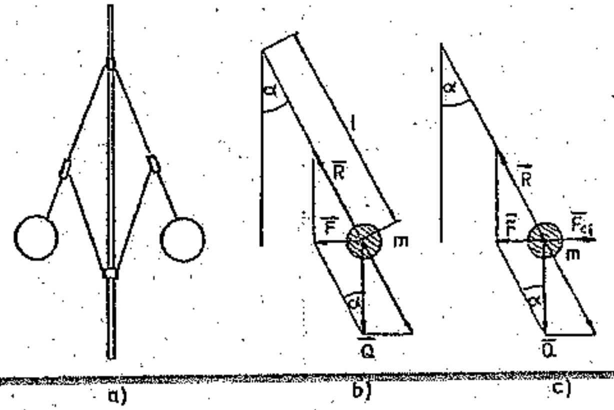
a) b)

Sl. 17.3

inercijalne sile i Zemljine teže. Za tečnosti u ravnoteži važi pravilo da rezultanta svih sila mora biti upravna na površinu tečnosti. Kada je broj obrta veoma veliki Q će biti zanemarljivo prema F_{ci}, tako da će površina tečnosti biti praktično normalna na F_{ci}. Ako se u sudu nalaze dve tečnosti ili više tečnosti različite zapreminske mase, onda će se one razdvojiti po slojevima (sl. 17.3.b). Ova pojava naročito se koristi u hemiji, biohemiji i dr. za razdvajanje pre svega organskih supstanci različitih molekulskih masa (npr. izdvajanje maslaca iz mleka, razdvajanje proteina). Uredjaji sa kojima se vrše razdvajanja nazivaju se centrifuge.

4. Vrlo poučan primer imamo kod tzv. centrifugalnog regulatora (sl. 17.4.a). Centrifugalni regulator sastoji se od dve metalne lopte postavljene tako da kad miruju vise pored jedne vertikalne obrtne osovine. Pri obrtanju lopte se udaljavaju od osovine utoliko više ukoliko je brzina obrtanja veća. Rad centrifugalnog regulatora analiziraćemo prvo sa gledišta jednog posmatrača van obrtnog sistema. Na masu m (sl. 17.4.b) dejstvuju dve sile, sila težine Q i sila reakcija R, koja se javlja u šipci l. Uniformno obrtanje nastaje kada rezultanta F ovih dveju sila daje potrebnu cen-

tripetalnu silu $ml\omega^2 \sin\alpha$, za obrtanje po krugu $r = l \sin\alpha$.



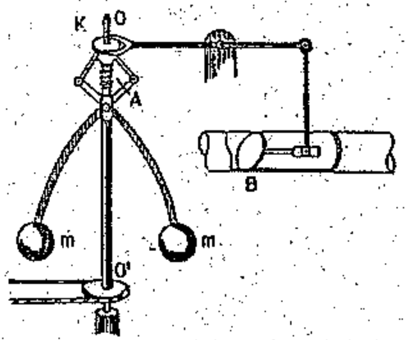
Sl. 17.4

Iz slike 17.4.b vidi se da je to slučaj kada je $F = Q\, tg\alpha$, proizilazi da je $Q\, tg\alpha = ml\omega^2 \sin\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{Q}{ml\omega^2}$$

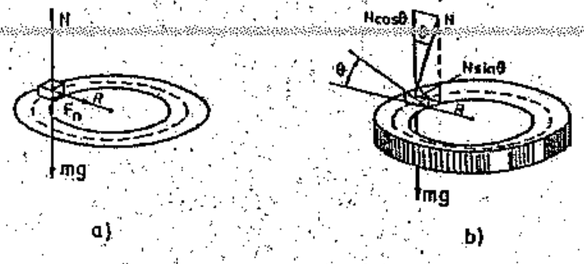
Ako isti slučaj analiziramo sa gledišta pokretnog posmatrača, onda se uz sile F i R javlja i centrifugalna sila F_{ci} (sl. 17.4.c). Oba načina razmatranja razlikuju se u tome što kod prvog sile Q i R, koje dejstvuju na kugle nisu u ravnoteži jer postoji rezultanta F, dok kod drugog razmatranja sve tri sile Q, R i F_{ci} su u ravnoteži. Centrifugalni regulator se upotrebljava za regulisanje broja obrtaja zamajca parne mašine (sl. 17.5). Na rotirajuću osovinu OO´ postavljene su dve masivne kugle m koje su spojene sa spojnicom K, o koju se upire opruga A. Spojnica je vezana sistemom poluga sa ventilom B, koji reguliše dovod pare u radni cilindar. Pri rotaciji kugle se razilaze i povlače spojnicu K naniže okrečući samim tim ventil. Pri povećanju broja obrtaja oko ose iznad neke norme, ventil B smanjuje dovod pare u cilindar. Pri smanjenju broja obrtaja ispod norme počinje da se povećava dovod pare. Tako se održava

stalna ugaona brzina rotacije.



Sl. 17.5

5. Pri kretanju vozila u krivini, radijusa R (sl. 17.6.a) na njih ne deluje centrifugalna inercijalna sila. Sile koje deluju



Sl. 17.6

na masu m u ovom slučaju su težina mg, normalna sila N i centripetalna sila F_n . Centripetalna sila je na primer kod automobila uzrokovana trenjem guma po putu. Da se smanji takvo trenje, koje troši gume i put, moramo ravan puta nagnuti kao na slici 17.6.b. Tada normalna sila N ima horizontalnu komponentu $N\sin\theta$ prema centru krivine, koja zamenjuje centripetalnu silu zbog trenja. Ugao nagiba θ potreban da bi se kretanje obavilo bez trenja, dobija se izjednačavajući pomenutu komponentu sa radijalnom silom mv^2/R i uzimajući u obzir da nema vertikalnog ubrzanja

$$N\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \; ; \; N\cos\theta = mg$$

odakle je

$$mg\, tg\theta = \frac{mv^2}{R}$$

odnosno

$$tg\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

U poslednjem obrascu se ne javlja masa vozila, što znači da ugao ne zavisi od mase vozila, već samo od brzine i poluprečnika krivine R. Zato, nagib puta mora da bude veći na oštrim krivinama (radijus krivine R manji) i auto-putevima.

6. Kod rotirajućih sistema, kao što su točkovi vozila, obrtni delovi raznih mašina (strugova, bušilica, brusilica, rotirajući bubnjevi itd.) moraju biti usled delovanja centrifugalnih inercijalnih sila izbalansirani. U protivnom, rezultanta centrifugalnih inercijalnih sila nije jednaka nuli, te se kod navedenih sistema pojavljuju vibracije koje mogu dovesti do kidanja materijala. Stoga se problemu balansiranja kod rotirajućih sistema mora posvetiti posebna pažnja.

III RAD I ENERGIJA

18. RAD

U svakodnevnom životu pod nazivom rad podrazumevamo svaki oblik aktivnosti koji zahteva mišićni napor i upotrebu mašina. U fizici je pojam rada strogo definisan i odnosi se na savladjivanje sile na datom putu. Dakle, naš zadatak će biti da pronadjemo izraz koji će na adekvatan način povezati silu i kretanje, osnovne veličine koje smo do sada uveli, u jednu novu, složenu veličinu, koju ćemo nazvati rad.

Videli smo na koji način se tela ubrzavaju pod dejstvom sila znajući da se tela pri tome pomeraju u prostoru. U mehanici se pomoću rada opisuje dejstvo sile povezano sa pomeranjem tela u prostoru. Iz iskustva je poznato da ako na neko telo deluje sila konstantnog intenziteta u pravcu i smeru kretanja (sl. 18.1) rad ove sile na putu od tačke A do tačke B iznosi

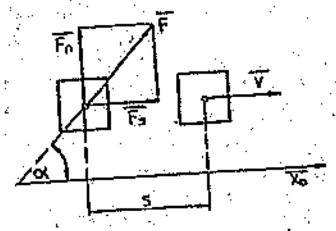
$$A = F \cdot s \qquad (18.1)$$

tj. rad je pri navedenom premeštanju tela jednak proizvodu iz sile i predjenog puta.

Sl. 18.1

Ako po intenzitetu stalna sila F (sl. 18.2), koja deluje na telo zaklapa uvek isti ugao α sa putem s može se razložiti na dve komponente $\vec{F}_n$ i $\vec{F}_s$. Dok komponenta $F_n = F\sin\alpha$ ne vrši rad, jer se telo ne kreće u njenom pravcu, dotle komponenta u pravcu puta $F_s = F\cos\alpha$ vrši rad, tako da je prema (18.1)

$$A = F\cdot s\ \cos\alpha \qquad (18.2)$$



Sl. 18.2

Obrazac (18.2) pokazuje neke okolnosti pri vršenju rada. Naime, kad je $\alpha = \pi/2$, tj. kada je sila normalna na put rad je jednak nuli. Kad je $\alpha = 0$ ili $\alpha = \pi$, tj. kada je sila paralelna sa putem, sila vrši rad celim svojim intenzitetom. Jednačina (18.2) može se na bazi ranije definisanog skalarnog proizvoda, jednačina (5), napisati kao

$$A = \vec{F}\cdot\vec{s} \qquad (18.3)$$

taj rad je skalarni proizvod sile F i pomeranja s. Postoji medjutim, niz situacija kod kojih sila koja deluje na telo nije konstantna, nego se menja duž pomeranja. Tada ćemo izraz (18.2) naći u infinitezimalno kratkom vremenu dt, za koje se vreme sila neće promeniti. U kratkom vremenskom intervalu telo će preći infinitezimalni deo puta ds, pa će i sila izvršiti infinitezimalni deo rada

$$dA = F\cdot ds\cdot\cos\alpha \qquad (18.4)$$

Za konačan rad u konačnom vremenu t pri čemu se telo pomakne od s_1 do s_2 rad će biti

$$A = \int dA = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\alpha\ ds \qquad (18.5)$$

Ako se i intenzitet i smer sile menja tokom pomeraja s, tada je potrebno poznavati i smer sile (tj. $\cos\alpha$) kao funkciju pomeraja s. U tom slučaju integracija može biti i komplikovana.

Jedinica za rad je džul (J). Rad od 1 J izvrši sila od 1 N na putu od 1m, ako je sila u pravcu puta. ($1J = 1N\cdot 1m$).

Rad je tesno povezan sa pojmom energije i videćemo kasnije da je rad mera za promenu energije tela.

19. SNAGA

Pri definiciji rada nismo uzimali u obzir vreme za koje su delovale sile. Pri podizanju tereta na visinu h izvrši se rad $m\cdot g\cdot h$, bez obzira da li smo predmet naglo ili sporo podigli. U mnogo slučajeva, medjutim, potrebno je znati brzinu kojom se vrši rad, odnosno vreme za koje se rad vrši. Da bi se okarakterisala brzina vršenja rada, uvedena je fizička veličina koja se naziva snaga.

Pri definisanju snage (brzina vršenja rada) poći ćemo istom analogijom kao i pri definisanju prostorne brzine (brzine prelaženja datog puta). Ako u vremenu t izvršimo rad A, tada ćemo srednju snagu definisati kao

$$\overline{P} = \frac{A}{t} \qquad (19.1)$$

Ako se izvršeni rad menja od jednog vremenskog intervala do drugog, definisaćemo trenutnu ili pravu snagu tako da analiziramo rad izvršen u sve kraćem vremenskom intervalu dt

$$P = \frac{dA}{dt} \qquad (19.2)$$

Na osnovu (19.1) i (18.1) može se definisati snaga konstantne sile F na putu s kao

$$\overline{P} = \frac{A}{t} = F\,\frac{s}{t} = F\cdot\overline{v} \qquad (19.3)$$

gde je $\overline{v}$ – srednja brzina.

Ako se ne radi o konstantnoj sili, analizira se rad u veoma kratkom vremenskom intervalu dt, za koji sila F deluje na kratkom putu ds. U tom slučaju se izraz (19.3) svodi na

$$P = F\frac{ds}{dt} = F\cdot v \qquad (19.4)$$

Snaga se dakle može dobiti kao proizvod sile i trenutne brzine kretanja tela. Ukoliko sila ne deluje u smeru kretanja (brzine) analogno izrazu (18.3) za rad, dobija se i za snagu

$$P = F\frac{s}{t}\cos\alpha = F\cdot v\cos\alpha$$

odnosno

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad (19.5)$$

Jedinica za snagu je vat (*W*). Jedan vat odgovara brzini vršenja rada od *1J* u *1s*. (*1W = 1J/1s*).

U tehnici se rad često izražava pomoću jedinica za snagu. Tako su nastale jedinice: vat-sekunda i kilovat-čas itd.

Vat-sekunda (*Ws*) je rad koji mašina snage *1W* izvrši za vreme *1s*, tj.

$$1\ Ws = 1W\cdot 1s = 1J$$

Kilovat-čas (*kWh*) je rad koji mašina snage *1kW* izvrši za vreme od 1 časa, tj.

$$1\ kWh = 1000W\cdot 3600s = 3{,}6\cdot 10^6\ J$$

20. ENERGIJA

Mada je pojam energije prilično teško definisati, on nam je blizak iz svakodnevnog života. Poznato je da sem rada koji vrše ljudi i životinje postoje i druge vrste rada. Na primer, voda koja teče može da obrće vodenični točak, kamen prilikom pada sa izvesne visine može da izvrši rad, sabijena opruga prilikom puštanja može da izvrši rad, itd. Fizička veličina koja karakteriše sposobnost tela ili sistema tela da izvrše rad naziva se energijom. Pri vršenju rada telo gubi energiju i prenosi je na sistem koji vrši rad. Rad

se, znači, može definisati kao proces kojim se vrši prenošenje energije medju telima.

Teorema (stav) o radu i energiji. Iz iskustva je poznato da je energija, koju izgubi (utroši) telo vršeći rad, jednaka tom radu i obrnuto, rad izvršen nad nekim telom jednak je povećanju njegove energije

$$\Delta E = E_f - E_i = A \qquad (20.1)$$

Na ovaj način je uspostavljena veza izmedju promene energije i rada, čime je omogućeno nalaženje energije preko izvršenog rada. Ova veza dalje pokazuje da se energija i rad izražavaju istim jedinicama, iako je po svojoj prirodi u pitanju druge fizičke veličine. Energija je veličina koja karakteriše stanje tela, dok je rad veličina koja karakteriše promenu tog stanja. Telo poseduje energiju, a rad predstavlja proces prenošenja energije sa jednog tela na drugo, ili proces pretvaranja jednog oblika energije u drugi. Na primer, pri elastičnom sudaru dva tela, jedno telo predaje drugom deo svoje energije.

Energija, kao i masa, predstavlja jednu od osnovnih karakteristika materije. U klasičnoj mehanici ove dve veličine su medjusobno nezavisne. Tek je u relativističkoj mehanici pokazano da je energija proporcionalna masi tela, čime je uspostavljena njihova medjusobna veza. U klasičnoj mehanici postoje dva oblika energije i to kinetička i potencijalna.

20.1. Kinetička energija

Da bismo uveli matematički izraz za kinetičku energiju tela, izračunaćemo rad sile F, koja deluje na telo mase m, koje se kreće po horizontalnoj podlozi bez trenja. Sila daje telu ubrzanje $\underline{a}$, koje ćemo dobiti primenom II Njutnovog zakona. Neka brzina raste od v_1, u početnom položaju s_1, do v_2 u krajnjem položaju s_2. Rad koji izvrši sila iznosi

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$$

Kako je $F = ma$ i $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$, dobijamo

$$A = \int_{s_1}^{s_2} m \cdot v \frac{dv}{ds}\, ds = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v dv$$

a nakon integraljenja

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad (20.2)$$

Ako relaciju (20.2) uporedimo sa teoremom (20.1) videćemo da je matematički izraz za kinetičku energiju opšteg oblika

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \qquad (20.3)$$

Fundamentalno značenje kinetičke energije vidimo iz izraza
(20.2) za rad sile. Pri vršenju rada sila F se može po volji
menjati; takodje i put $s_2 - s_1$ može biti velik ili mali. Me-
djutim, u krajnjem izrazu se pojavljuje samo masa, te krajnja
i početna brzina tela. Kada se telo pomera po horizontalnoj
podlozi bez trenja, rad sile se utroši samo na povećanje br-
zine tela i jednak je promeni kinetičke energije.

Ako se, dakle, masa m kreće brzinom v, njena ki-
netička energija iznosi $mv^2/2$. To znači da za ubrzanje mase m
od mirovanja do brzine v treba utrošiti količinu energije
$mv^2/2$. S druge strane, ako se telo pod delovanjem neke sile
usporava, njegova kinetička energija se smanjuje. Ta kinetič-
ka energija prelazi na sistem koji okružuje telo i koji na
njega deluje usporavajućom silom. Rad Fds, koji to telo može
izvršiti, može poticati samo od smanjenja kinetičke enrgije

od njene maksimalne vrednosti do nule, tj. dok se telo sasvim ne umiri.

Rezimirajući dakle, možemo reći da kad sila vrši rad delujući na masu u smeru njenog kretanja, kinetička energija mase raste. Izvršen rad meri transformaciju energije koja dolazi spolja u kinetičku energiju mase. S druge strane, kada sila deluje suprotno od smera kretanja, transformacija energije vrši se u suprotnom smeru; izvršen rad opet je mera promene kinetičke energije, ali ovoga puta energija prelazi s mase na okolinu.

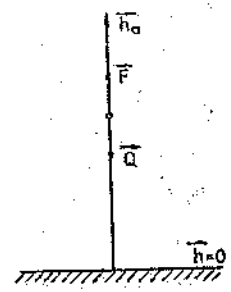
20.2. Potencijalna energija

Potencijalna energija predstavlja rad koji telo akumulira dospevajući u datu tačku nekog polja sila. Telo je sposobno da ovaj rad u bilo kom trenutku vremena vrati, pa se zato potencijalna energija popularno definiše kao sposobnost tela da izvrši rad zahvaljujući položaju i stanju u kome se nalazi. Najaktuelnija polja sile u mehanici su gravitaciono polje i polje elastičnih sila, pa se otuda govori o gravitacionoj i elastičnoj potencijalnoj energiji.

a. Gravitaciona potencijalna energija

Da bismo dobili matematički izraz za energiju položaja tela u gravitacionom polju izračunaćemo minimalan rad potreban da se telo mase m digne na visinu h računajući od nekog proizvoljnog nivoa, recimo površine Zemlje (sl. 20.1). Kako je težina tela $Q = mg$ ili u vektorskom obliku

$$\vec{Q} = -mg\vec{h}_0 \qquad (20.4)$$



Sl. 20.1

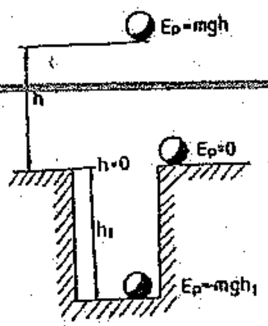
gde je $\vec{h}_0$ jedinični vektor, koji odredjuje pravac i smer $\vec{h}$, to je sila $\vec{F}$ potrebna da podignemo telo po inetenzitetu konstantna i jednaka težini tela

$$\vec{F} = -\vec{Q} = m\vec{g}h_0 \qquad (20.5)$$

Rad potreban da podignemo telo prema (10.1) iznosi

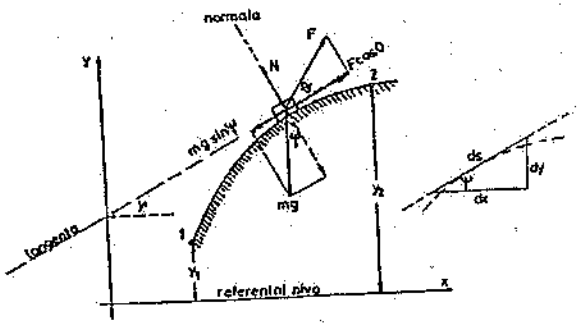
$$A = E_p = \vec{F}\cdot\vec{h} = mgh \qquad (20.6)$$

tj. potencijalna energija nekog tela u gravitacionom polju zavisi samo od njegove visine u odnosu na površinu Zemlje (h=0). Kako se nulti nivo potencijalne energije bira proizvoljno, ovaj vid energije može biti i negativan. Na primer, prema slici 20.2. posmatrano telo ima na površini Zemlje potencijalnu energiju $E_p=0$, na visini h $E_p=mgh$, a u jami dubine h_1 $E_p=-mgh_1$.



Sl. 20.2

Predpostavimo sada da telo nismo podizali vertikalno, nego po bilo kakvoj krivoj površini bez trenja (sl. 20.3). Za



Sl. 20.3

vreme infinitezimalnog pomaka ds duž krivine postoje tri sile koje deluju na telo: težina mg prema dole, normalna sila N koja predstavlja reakciju podloge i spoljašnja sila F koja pomera telo prema gore. Neka sila F zaklapa sa tangentom na površini ugao θ. Za telo koje se polako pomera po površini tangencijalne komponente svih sila moraju biti u ravnoteži, tj. mora biti

$$F\cos\theta - mg\sin\psi = 0 \qquad (20.7)$$

Rad koji izvrše spoljašnje sile pomerajući telo iz tačke 1 u tačku 2 iznosi

$$A = \int_1^2 F\cos\theta\, ds \qquad (20.8)$$

ili prema (20.7)

$$A = \int_1^2 mg\sin\psi\, ds \qquad (20.9)$$

Odnos između infinitezimalnog puta ds, njegove vertikalne komponente dy i ugla ψ prikazan je na slici 20.3. Očigledno je

$$ds\sin\psi = dy$$

pa je

$$A = \int_1^2 m\cdot g\cdot dy$$

odnosno

$$A = m\cdot g\cdot y_2 - m\cdot g\cdot y_1 \qquad (20.10)$$

Izraz (20.10) pokazuje da izvršen rad zavisi samo od početnog

(y_1) i krajnjeg položaja (y_2), a nezavisan je od oblika putanje duž koje smo pomerali telo. Fizička polja u kojima izvršen rad ima ovakvu osobinu zovu se konzervativnim poljima. Sile koje imaju ovakva polja zovu se potencijalne sile. Za bilo koju potencijalnu silu $\vec{F}$ potencijalna energija se može izračunati iz formule

$$E_p = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} + C \qquad (20.11)$$

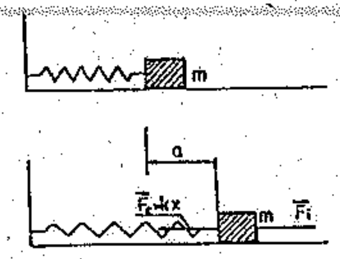
b. Potencijalna energija elastične deformacije

U mehanici se često sreće još jedan tip potencijalne sile, a to je elastična sila. Posmatraćemo elastičnu silu čiji se intenzitet linearno povećava sa rastojanjem elastičnog sistema od ravnotežnog položaja.

$$\vec{F}_e(x) = -k\,\vec{x} \qquad (20.12)$$

Sile sa ovakvim osobinama se nazivaju harmonijskim silama. Izračunaćemo rad potreban da se elastična opruga istegne za dužinu a od ravnotežnog položaja (sl. 20.4). Silu istezanja možemo napisati u obliku

$$\vec{F}_i = -\vec{F}_e = k\vec{x} \qquad (20.13)$$



te pri istezanju od 0 do a ukupno vršimo rad

$$A = \int_0^a \vec{F}_i d\vec{x} = k\int_0^a x\,dx = k\frac{a^2}{2} \qquad (20.14)$$

Sl. 20.4

pa možemo reći da smo ovim radom povećali potencijalnu energiju opruge sa 0 na

$$E_p = k\,\frac{a^2}{2} \qquad (20.15)$$

c. Apsolutne vrednosti potencijalne i kinetičke energije

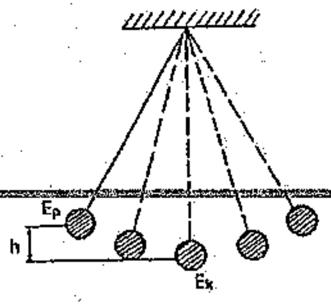
Definicija gravitacione potencijalne energije, mgh, implicira da je potencijalna energija jednaka nuli kada je h=0, tj. kada se telo nalazi na nultom referentnom nivou. Medjutim, odredjivanje nultog referentnog nivoa visine sasvim je proizvoljno. Podignemo li telo sa stola, tada nam je nulti nivo površina stola. No očito je da je površina stola sasvim proizvoljni nulti nivo: na primer, za pod sobe površina stola je već povišeni nivo, gde potencijalna energija nije nula. Ta neodredjenost, medjutim, nije značajna u praksi, jer se uvek radi o razlici potencijalnih energija, koja je nezavisna od referentnog nivoa. Potencijalna energija je odredjena, dakle, do na aditivnu konstantu. Takodje treba uočiti da je potencijalna energija svojstvo sistema, a ne pojedinih njegovih delova. Ako, na primer, rukama podignemo neki predmet sa poda, mi smo istovremeno nogama odgurnuli Zemlju. Kad bi Zemlja i podignuti predmet (na primer jedan planetoid) bili uporedive veličine, ne bi bilo jasno kojem od ta dva tela treba povećati potencijalnu energiju. Ispravno je shvatanje da je gravitaciona potencijalna energija povećana u celom sistemu, tj. da se potencijalna energija sistema dva planetoida poveća kad ih medjusobno udaljimo. Slično tome se, na primer, potencijalna energija elastične opruge poveća kad je rastegnemo.

Slična razmatranja mogu se preneti i na kinetičku energiju. Kinetička energija tela koje miruje u laboratoriji je nula. No znamo da se to isto telo kreće zajedno sa Zemljom velikom brzinom, koju mi ne opažamo. Samo je dakle njegova kinetička energija kretanja s obzirom na Zemlju jednaka nuli. I kinetičku energiju dakle definišemo do na jednu aditivnu konstantu s obzirom na odredjeni inercijalni sistem.

20.3. Zakon održanja energije

U mehanici vrlo često analiziramo zatvorene sisteme, tj. takve sisteme na koje ne deluju spoljašnje sile. Sile u takvim sistemima se pojavljuju samo kao medjudelovanja tela u sistemu. Rad u tim sistemima se odvija kroz izmenu energije. Pitanje koje možemo postaviti jeste da li se energija u tim procesima transformacije izgubi ili ostaje sačuvana.

Jednostavan primer prelaza kinetičke energije u potencijalnu daje nam obično klatno (sl. 20.5). U krajnjem levom (ili desnom) položaju kuglica ima najveću visinu, zbog toga će imati i najveću potencijalnu energiju u tom položaju. Kad se spušta gubi potencijalnu energiju, ali postaje sve brža i dobiaja kinetičku energiju. U najnižem položaju potencijalna energija je najmanja, ali je brzina kuglice najveća, pa će biti najveća i kinetička energija.



Sl. 20.5

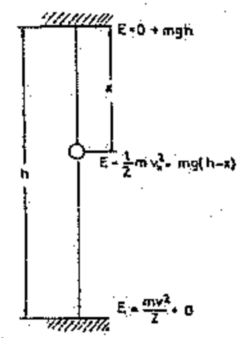
Drugim rečima, kinetička i potencijalna energija kuglice nisu stalne. One se neprestano menjaju, ali koliko se jedna poveća toliko se druga smanji. Njihov zbir ostaje stalan. Zato govorimo o održanju energije i to ne samo kinetičke ili samo potencijalne, već ukupne energije. To se može napisati u obliku

$$E = E_k + E_p \qquad (20.16)$$

ili formulisati na sledeći način: *ukupna mehanička energija (E) zatvorenog sistema tela, izmedju kojih dejstvuju samo potencijalne sile, ostaje nepromenjena, ili u zatvorenom sistemu u kojem ne deluju sile trenja, zbir kinetičke i potencijalne energije (mehanička energija) je konstantan.* Ovo pravilo se zove i zakon o održanju mehaničke energije.

Navedeni primer kvalitativno ilustruje zakon o očuvanju mehaničke energije. Medjutim, nije jasno da li ovo razmatranje važi i kvantitativno, tj. da li je u svakom položaju kuglice pri njihanju zbir kinetičke i potencijalne energije

stalan. Analizirajmo zato primer slobodnog pada (sl. 20.6), gde telo iz stanja mirovanja pada sa visine h. Na početku je njegova kinetička energija nula. Na osnovu (20.16) ukupna energija sastoji se dakle samo od potencijalne energije i iznosi



Sl. 20.6

$$E = E_p = mgh$$

Nakon pada (otpor vazduha se zanemaruje) za proizvoljnu visinu x telo ima brzinu v_x i kinetičku energiju $mv_x^2/2$. Ukupna energija je

$$E = \frac{mv_x^2}{2} + mg(h - x)$$

Kako je brzina kod slobodnog pada prema (5.2) $v_x = \sqrt{2gx}$, to je energija tela

$$E = \frac{m}{2} 2gx + mg(h - x) = mgh$$

jednaka kao na početku.

Telo, slobodno padajući, posle izvesnog vremena padne na površinu Zemlje (h=0) i tada mu je potencijalna energija jednaka nuli. Kako je brzina tela u trenutku udara o Zemlju $v = \sqrt{2gh}$, dobija se da je kinetička energija u tom položaju

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\, 2gh = mgh$$

tj. jednaka je energiji tela koju je ono imalo na visini h. Odavde se vidi da telo prilikom slobodnog pada održava svoju ukupnu mehaničku energiju, iako se potencijalna energija pretvara u kinetičku.

Izraz (20.16), iako razmatran u jednom posebnom slučaju, je opšti. Naime, radi jednostavnosti u prethodnim primerima, govorili smo samo o potencijalnoj i kinetičkoj energiji i njihovom zbiru. Da smo u razmatranje uključili i trenje, struktura izraza (20.16) ostala bi ista, samo bi se sa desne strane pojavio izraz za rad sila trenja. No, u svakom slučaju, rad spoljašnjih sila A_F bio bi jednak zbiru promene kinetičke energije ΔE_k i potencijalne energije ΔE_p uvećane eventualno za rad sila trenja A_{tr}.

$$A_F = \Delta E_k + \Delta E_p + A_{tr} \qquad (20.17)$$

Ako zanemarimo trenje i ako je sistem zatvoren, tada je rad spoljašnjih sila $A_F = 0$, te iz izraza (20.17) dobijamo

$$\Delta E_p + \Delta E_k = 0$$

ili

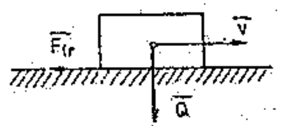
$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

čime je pokazano da se energija izolovanog sistema ne može promeniti, već samo pretvarati u razne vidove. Demonstrirani zakon je jedan od fundamentalnih zakona fizike i u opštem obliku važi u svim oblastima prirodnih nauka.

21. TRENJE

Pri proučavanju kretanja do sada nismo vodili računa o trenju. Medjutim, uvek kada se jedno telo kreće, bilo po čvrstoj podlozi ili kroz neku tečnost ili gas, na njega izmedju ostalih sila deluje i sila trenja. Sila trenja se javlja kod tela koja se relativno kreću jedno prema drugom dodirujući se izvesnim delovima svoje površine. Sile trenja su uvek usmerene nasuprot smeru kretanja tela (sl. 21.1). Samo trenje je vrlo komplikovana pojava i mada možemo reći da je trenje posledica delovanja molekularnih sila na površini tela, detaljni mehanizam trenja još nije sasvim poznat. Trenje postoji i u slučaju mirovanja tela i naziva se statičko trenje, za razliku od trenja u stanju kretanja koje se naziva dinamičko. Sile trenja vrše rad na telima smanjujući njihovu energiju

$$A_{tr} = \vec{F}_{tr} \cdot \vec{s} = -F_{tr} s \qquad (21.1)$$



Sl. 21.1

Sila trenja je nepotencijalna sila, koja deo mehaničke energije sistema pretvara u toplotu. U termodinamici ćemo videti da se ova toplota ustvari troši na povećanje kinetičke i potencijalne energije molekula, što znači da se energija prenosi na mikrokretanje sistema, što se makrofizički opisuje kao "gubitak" mehaničke energije. Trenje koje se javlja pri medjusobnom proklizavanju slojeva tečnosti zove se viskoznim trenjem, dok se trenje medju čvrstim telima zove suvim trenjem. Trenje još delimo na trenje klizanja i trenje kotrljanja.

a. Suvo trenje klizanja

Za slučaj klizanja tela po nekoj podlozi eksperimentalno je utvrdjeno da je sila trenja $\vec{F}_{tr}$ proporcionalna normalnoj komponenti sile $\vec{N}$, kojom telo pritiskuje podlogu, tj.

$$F_{tr} = \mu \cdot N; \; \mu = \frac{F_{tr}}{N} \qquad (21.2)$$

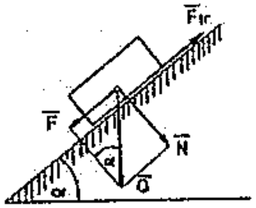
gde je μ - koeficijent proporcionalnosti i naziva se koeficijent trenja. Eksperimentalno je nadjeno da sila suvog trenja ne zavisi od dodirne površine tela, već samo od sile kojom telo deluje na podlogu.

U primeru kretanja tela, predstavljenom na slici 21.1., sila trenja je

$$F_{tr} = \mu Q; \; \mu = \frac{F_{tr}}{Q} \qquad (21.3)$$

Kada se telo nalazi na strmoj ravni (sl. 21.2), težina tela $\vec{Q}$ može da se razloži na dve komponente - komponentu $\vec{F} = \vec{Q}\, \sin\alpha$ u pravcu strme ravni i normalnu komponentu $\vec{N} = \vec{Q}\, \cos\alpha$. Na osnovu (21.2) može se napisati da je

$$\vec{F}_{tr} = \mu \vec{N} = \mu \vec{Q} \cos\alpha$$



Sl. 21.2

Ako se ugao strme ravni podesi da telo klizi niz strmu ravan stalnom brzinom ($\vec{v}$ = *const.*), onda su sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_{tr}$ u ravnoteži, tj.

$$\vec{Q}\ sin\alpha = \mu\vec{Q}\ cos\alpha$$

ili

$$\mu = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha \qquad (21.4)$$

Izraz (21.4) omogućuje da se merenjem nagibnog ugla strme ravni odredi koeficijent trenja.

Koeficijent trenja zavisi od vrste materijala i obradjenosti dodirnih površina, kao i od brzine kretanja tela. Ovaj koeficijent ima najveću vrednost kada je uzajamna brzina tela v = 0 (statički koeficijent trenja). Pri malim brzinama koeficijent trenja ima malu vrednost i generalno se njegova vrednost povećava sa povećanjem brzine kretanja.

Da bi umanjili uticaj trenja na kretanje tela po podlozi upotrebljavaju se sredstva za podmazivanje. Kad se upotrebi takvo sredstvo, a to je najčešće neko ulje, onda se izloženi zakoni trenja znatno menjaju. Sila trenja nije više nezavisna od veličine dodirne površine, već više zavisi od njenego od normalnog pritiska.

Najčešće se uticaj trenja smanjuje na taj način što se, kad god je to moguće, trenje klizanja zamenjuje trenjem kotrljanja upotrebom valjkastih ili kugličnih ležaja.

Ne treba naglašavati da trenje nije uvek štetna pojava. Da nema trenja automobili, vozovi itd. ne bi mogli da se kreću. Ukoliko ne bi bilo trenja, hodanje bi bilo kao na poledici. No i pored toga, trenje može biti štetna pojava; na primer, trenje u pokretnim delovima raznih mašina u mnogome utiče na njihov vek trajanja.

IV GRAVITACIJA

22. NJUTNOV ZAKON GRAVITACIJE

Od svih sila sa kojima se srećemo u svakodnevnom životu najočitija je težina. Svako telo na Zemlji ima težinu, što znači da svako telo na Zemlji, prepušteno samo sebi, pada ubrzano po trajektoriji koja je u proseku normalna na Zemljinu površinu. Kažemo "u proseku", jer druge sile, na primer otpor trenja, mogu deformisati pravolinijsku putanju koju, na primer, zapažamo pri padanju težih tela.

S druge strane, ne manje uočljiva pojava bilo je kružno kretanje nebeskih tela po nebeskom svodu. Dnevno kretanje zvezda, dnevno i godišnje kretanje Sunca, te znatno složenija kretanja Meseca i planeta* budili su interes i znatiželju ljudi od nauke od davnina. Medjutim, ideja da su te dve pojave, težina i kretanje nebeskih tela, povezane relativno je nova. Naime, gotovo dvadeset vekova posle postavke Ptolomejeve teorije geocentričnog sistema** torunjski biskup Nikola Kopernik*** postavlja teoriju heliocentričnog sistema prema kojoj je Sunce središte svemira, a sve ostale planete, pa i Zemlja, kruže oko njega. Ovo je osnovna postavka heliocentričnog sistema. Druga Kopernikova postavka jeste da se Zemlja kreće oko Sunca u pravcu zapad-istok i da u toku jedne godine obidje oko Sunca, a za 24 časa se obrne oko svoje ose. Njegova treća postavka jeste da je osa Zemlje nagnuta pod uglom od 66,5° prema ravni svoje putanje (ekliptike). O Kopernikovom naprednom shvatanju Engels je napisao:"Kopernik je prvi skinuo zvezde sa neba i omogućio

---

* *Planete su: Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn itd.*

** *Prema teoriji geocentričnog sistema Zemlja je nepomična i nalazi se u središtu svemira.*

*** *Nikolaj Kopernik (1473–1543), poljski astronom, osnivač heliocentričnog sistema, koji je postavio u svom delu "De revolutionibus orbium caelestium, libri VI", izdatim nekoliko meseci pre smrti. Kopernik pripada onim umovima čija je nauka bitno promenila svet.*